



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**LETECKÝ ÚSTAV**

INSTITUTE OF AEROSPACE ENGINEERING

**FREKVENČNÍ ANALÝZA OPTICKÝM SYSTÉMEM**

FREQUENCY ANALYSIS WITH USING OPTICAL SYSTEM

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Klára Chlebounová**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. Ivo Jebáček, Ph.D.**

**BRNO 2016**



## Zadání diplomové práce

Ústav: Letecký ústav  
Studentka: **Bc. Klára Chlebounová**  
Studijní program: Strojní inženýrství  
Studijní obor: Stavba letadel  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Ivo Jebáček, Ph.D.**  
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### Frekvenční analýza optickým systémem

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student z dostupné literatury načerpá informace o možnostech vibrační analýzy částí leteckých konstrukcí, které použije pro vlastní tvorbu metodiky měření. Dále provede na dostupné letecké konstrukci základní frekvenční analýzu, kterou ověří navrhovaný postup.

#### Cíle diplomové práce:

Výstupem bude přehled možností jak použít optický systém deformací pro frekvenční analýzu leteckých konstrukcí a závěrem bude proveden experiment pro možné posouzení těchto možností.

#### Seznam literatury:

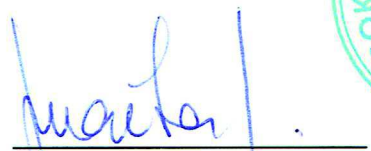
Freberg, C., R., Kemler, E., N., C. (1944): Aircraft vibration and flutter. John Wiley&Sons, Inc., New York.

W. Heylen, S., Lammens and P. Sas (1997): Modal Analysis Theory and Testing. KUL Press, Leuven.

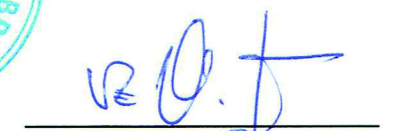
Ewins, D., J., (2000): Modal Testing, Theory, Practice and Application. Baldock: Research, Studies Press LTD, 2nd edition.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16.

V Brně, dne 3. 12. 2015

  
\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Jaroslav Juračka, Ph.D.  
ředitel ústavu



  
\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan



## **ABSTRAKT**

Cílem diplomové práce je vytvoření metodiky měření vibrací na leteckých konstrukcích pomocí optického systému a provedení základní frekvenční analýzy. Práce se krátce věnuje teoretickým základům aeroelastických jevů a metodám řešení vlastních tvarů kmitů a frekvencí. V praktické části je metodika měření vytvořena pro jednoduché kmitání vetknutých prutů a dále je aplikována na frekvenční analýzu křídla.

## **Klíčová slova**

kmitání leteckých konstrukcí, frekvenční analýza, optický systém PONTOS, aeroelastické jevy

## **ABSTRACT**

The goal of this thesis is to create a methodology for measuring vibration on the aircraft construction with using optical system and perform basic frequency analysis. Work shortly discusses the theoretical foundations of aeroelastic phenomenon and methods of solving its own deflection shapes and frequencies. In the practical part is measurement methodology designed for simple vibration of clamped rods and then is applied to a frequency analysis of the wing.

## **Key words**

vibration of aircraft constructions, frequency analysis, optical system PONTOS, aeroelastic phenomenon

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

CHLEBOUNOVÁ, K. *Frekvenční analýza optickým systémem*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 111 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Ivo Jebáček, Ph.D..

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Frekvenční analýza optickým systémem“ jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu zdrojů na konci práce.

V Brně dne 26. 5. 2016

---

Bc. Klára Chlebounová

## **PODĚKOVÁNÍ**

Ráda bych poděkovala doc. Ing. Ivovi Jebáčkovi, Ph.D. za věcné připomínky při konzultacích a asistenci u praktických měření s akcelerometrem, dále Ing. Janu Šplíchalovi, Ph.D. za pomoc, trpělivost a cenné rady při měřeních s optickým systémem a také všem z Leteckého ústav VUT FSI, kteří se podíleli na přípravě měření. V neposlední řadě děkuji všem, kteří mě během studia podporovali, především rodině a přátelům, a přispěli tak i k vytvoření této práce.

# OBSAH

1	ÚVOD .....	8
2	AEROELASTICKÉ JEvy LETECKÝCH KONSTRUKCÍ .....	9
2.1	Základní aeroelastické charakteristiky typického řezu .....	10
2.2	Statické aeroelastické jevy .....	11
2.2.1	Změna rozložení aerodynamického zatížení .....	11
2.2.2	Torzní divergence .....	11
2.2.3	Snížení účinnosti a reverze řízení .....	13
2.2.4	Statická stabilita poddajného letounu .....	14
2.3	Dynamické aeroelastické jevy .....	14
2.3.1	Flutter .....	14
2.3.2	Buffeting .....	16
2.3.3	Aeroelastická odezva na dynamické zatížení .....	17
2.3.4	Dynamická stabilita a řiditelnost .....	17
2.4	Konstrukční tlumení .....	17
3	KMITÁNÍ LETECKÝCH KONSTRUKCÍ .....	18
3.1	Kinematika kmitavého pohybu .....	18
3.2	Kmitání křídel a ocasních ploch .....	20
4	PŘIBLIŽNÉ METODY ŘEŠENÍ VLASTNÍCH TVARŮ A FREKVENCÍ .....	21
4.1	Teoretické metody řešení .....	21
4.1.1	Rayleighova metoda výpočtu vlastní frekvence .....	21
4.1.2	Metoda konečných prvků .....	21
4.1.3	Fourierova transformace .....	22
4.2	Experimentální řešení .....	22
4.2.1	Experimentální modální analýza .....	22
4.2.2	Bezkontaktní měření vibrací pomocí laseru .....	24
4.2.3	Bezkontaktní měření systémem Pontos .....	25
5	FREKVENČNÍ ANALÝZA OPTICKÝM SYSTÉMEM PONTOS .....	28
5.1	Frekvenční analýza vetknutých prutů .....	29
5.1.1	Kalibrace systému .....	29
5.1.2	Příprava experimentu .....	32
5.1.3	Realizace experimentu .....	34
5.1.4	Vyhodnocení experimentu .....	35
5.1.5	Vyhodnocení měření bez kontroly s akcelerometrem .....	40
5.1.6	Vyhodnocení měření s použitím akcelerometru .....	57
5.2	Frekvenční analýza křídla .....	70
5.2.1	Kalibrace systému .....	70

5.2.2	Příprava experimentu .....	71
5.2.3	Realizace experimentu .....	74
5.2.4	Vyhodnocení experimentu .....	75
6	ZÁVĚR .....	95
7	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ .....	96
8	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	98
8.1	Seznam použitých symbolů.....	98
8.2	Seznam použitých zkratk .....	99
9	SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK.....	100
9.1	Seznam obrázků .....	100
9.2	Seznam tabulek .....	102
	PŘÍLOHY .....	103

# 1 ÚVOD

V současné době máme mnoho požadavků, které by měl nově vyvinutý letoun splňovat, ať už je to spolehlivost, maximální rychlost, kterou je schopen vyvinout nebo například mít co největší vzletovou hmotnost. Důležitým faktorem je ekonomičnost a nově se do popředí dostává i požadavek na komfort jak pro piloty, tak především pro cestující. Na prvním místě by však měla být bezpečnost.

Bezpečnost zahrnuje zálohování systémů důležitých pro let a hlavně vytvoření konstrukce letounu tak, aby vydržela všechna předpokládaná zatížení a nedosáhla nepovolených deformací. Jedním z nebezpečí je právě kmitání konstrukce. Žádná část konstrukce není dokonale tuhé těleso, při zatížení se různě ohýbá, posouvá a kroutí a je-li zatížena aerodynamickými silami, způsobuje deformace změnu obtékání a tím také mění velikost sil, kterou deformaci způsobují. Odezvou na tyto síly jsou síly elastické, které se snaží udržet konstrukci ve výchozí nezatížené poloze. Pokud je konstrukční celek dostatečně tuhý a zatěžující síly nejsou nepřiměřeně velké, neměl by nastat případ, kdy konstrukce toto zatížení nevydrží. Pokud však bude zatížení aerodynamickými silami příliš velké nebo tuhost konstrukce nebude dostatečná, pak se to projeví nebezpečnými aeroelastickými jevy. Právě popisu aeroelastických jevů bude věnována část této práce.

Již od počátku letectví se piloti a konstruktéři setkávali s těmito jevy, které v krajních případech způsobovaly katastrofické havárie letounů. V těchto počátcích však nebyly známy příčiny vzniku těchto jevů ani účinná obrana proti nim. I když v dnešní době víme, jaké aeroelastické jevy mohou nastat, co je způsobuje a ve velké míře i jak jim předcházet, tak stále není jednoduché odhalit, při jakých krajních podmínkách tyto jevy nastanou. Vzhledem k tomu, že je snaha dělat letouny co možná nejlehčí, vyvíjí se nové materiály pro použití v letectví, a zároveň je cílem dosahovat co nejvyšších rychlostí, je riziko vzniku aeroelastických jevů vysoké. Proto je důležité věnovat tomuto problému zvýšenou pozornost při samotném návrhu konstrukce. [1]

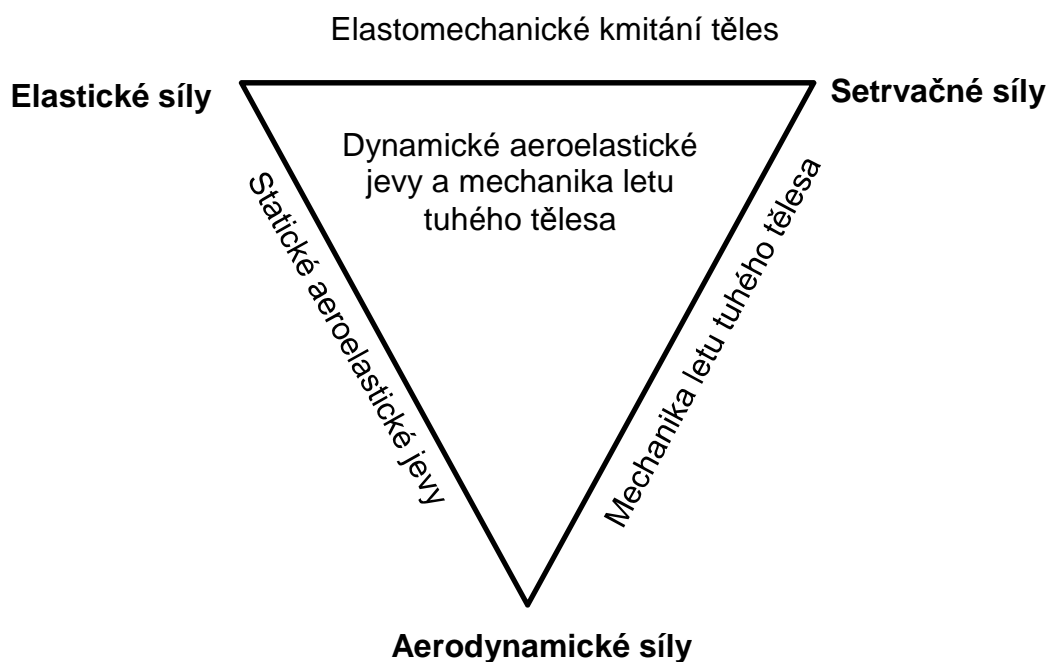
Na rozdíl od statických aeroelastických jevů, kde je většinou řešením zvýšení tuhosti konstrukce, u dynamických jevů je příčin vzniku a rozvoje kmitání podstatně více a o to složitější je jejich identifikace a následné řešení. U dynamických jevů je kromě tuhosti také podstatná hustota konstrukce křídla a její rozložení. Ta má vliv na vlastní frekvenci konstrukce, což je důležité znát právě kvůli nebezpečí, že se konstrukce rozkmitá v rezonanci.

Podle většiny leteckých předpisů je prokázání odolnosti vůči aeroelastickým jevům jednou z podmínek k certifikaci letounu. Experimentální část této diplomové práce bude právě zaměřena na metody frekvenční analýzy a tím zjišťování možného nebezpečí již na zemi.

## 2 AEROELASTICKÉ JEVY LETECKÝCH KONSTRUKCÍ

Aeroelasticita se zabývá pohybem poddajných těles, protékaných nebo obtékaných proudem plynu (v tomto případě vzduchu) v souvislosti s příčinami, jež tento pohyb způsobují. Také se může aeroelasticita definovat jako nauka zkoumající řadu fyzikálních jevů, jejíž podstatou je vzájemné působení aerodynamických, elastických a také setrvačných sil, které vznikají při relativním pohybu plynu a poddajného tělesa. Tato definice platí v rámci aeroelasticity leteckých konstrukcí, pokud neuvažujeme jiné vlivy, jako je třeba teplotní pnutí od aerodynamického ohřevu atd. U vzniku aeroelastického jevu nemusejí nutně figurovat všechny již zmíněné síly. Jako aeroelastický jev označujeme jev, který vznikl vzájemným působením alespoň aerodynamických a elastických sil. [2]

Aeroelasticita všeobecně nezjišťuje lokální napjatost konstrukce, avšak řeší stabilitu zpětných vazeb zatížení od deformace konstrukce. Při aeroelastické kontrole se zjišťuje (ověřuje), zda u jednotlivých aeroelastických jevů nedojde k divergentním deformacím, ať už statickým nebo dynamickým, a to v celém rozsahu letových rychlostí u daného letounu. [3]



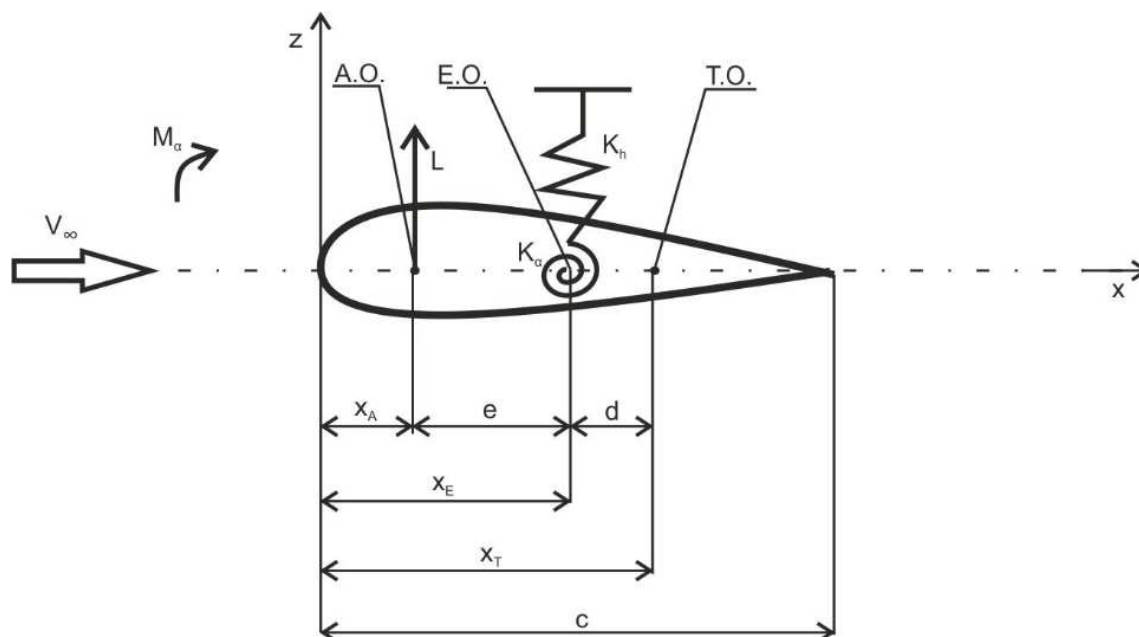
Obr. 1 Základní trojúhelníkové schéma aeroelasticity [2]

Z obrázku, který jako první vytvořil A. R. Collar, je patrné, z jakých sil se aeroelastický jev skládá. Aerodynamika (stacionární nebo nestacionární) představuje tekutou fázi neboli mechaniku tekutin, naopak elastické a setrvačné síly tvoří tzv. tuhou fázi, která zahrnuje mechaniku těles (pevnost, pružnost a dynamiku pružných těles).

V kapitolách 2.2 a 2.3 budou stručně charakterizovány nejdůležitější statické a dynamické aeroelastické jevy.

## 2.1 Základní aeroelastické charakteristiky typického řezu

Typický řez nosnou plochou (křídlem nebo ocasními plochami) je dobré použít k objasnění fyzikální podstaty aeroelastických jevů. Tato aeroelastická soustava je představována nosnou plochou nekonečné štíhlosti (profilem), který je uchycen pomocí dvou fiktivních pružin, kterými jsou modelovány torzní ( $K_\alpha$ ) a ohybová tuhost ( $K_h$ ) daného řezu. Jedná se o model se dvěma stupni volnosti a dvourozměrným obtékáním. Při pohybu typického řezu neuvažujeme pohyb ve směru osy  $x$ , jelikož tuhost v rovině nosné plochy je mnohem vyšší než tuhost v kolmém směru na nosnou plochu. [2]



Obr. 2 Mechanický model typického řezu nosné plochy

Poloha aerodynamické, elastické a těžištní osy udává vzájemné rozložení odpovídajících sil působících v daném řezu a z toho vyplývající pohyb. Aerodynamická osa (A. O.) je tvořena spojnici aerodynamických středů jednotlivých profilů, kdežto těžištní osa (T. O.) je tvořena spojnici těžišť jednotlivých řezů. Elastická osa (E. O.) je taková osa podél rozpětí křídla, na kterou když bude působit síla kolmá k ploše křídla, bude křídlo pouze ohýbat, ale nezkroutit ho. Jinak řečeno je elastická osa spojnici středů smyku. Vzájemná poloha os rozhoduje o charakteru vzniklého aeroelastického jevu. [1] [2]

Základní charakteristiky typického řezu se vyjadřují hmotnostmi, poloměry setrvačnosti, dále pak statickými momenty a momenty setrvačnosti, které se vztahují k elastické ose. Vztlak, působící v aerodynamické ose a klopivý moment jsou aerodynamickými charakteristikami typického řezu. Při předpokladu malých úhlů náběhu se může v aeroelastických rozborech zanedbávat odpor, jelikož je jeho velikost v tomto případě, při uvážení velikosti vztlaku, zanedbatelná. Navíc tuhost nosné plochy ve směru osy  $x$  (ve směru odporu) je mnohem větší než ve směru osy  $z$  (ve směru působícího vztlaku). Odpor však nemůžeme zanedbávat při velkých úhlech náběhu, např. při zkoumání třepetání. [2]



## 2.2 Statické aeroelastické jevy

Statické aeroelastické jevy jsou charakteristické statickou zátěží bez přítomnosti setrvačných sil. Vznikají tedy pouze za účasti aerodynamických a elastických sil a v důsledku nastává jednosměrná deformace tělesa (ohyb, zkrut,...). [2] [3]

Základní rozdělení statických aeroelastických jevů:

- změna rozložení aerodynamického zatížení
- torzní divergence
- snížení účinnosti řízení
- reverze řízení
- statická stabilita netuhého letounu

Statické aeroelastické jevy na křídle můžeme ovlivnit například úhlem šípů. Při kladném úhlu šípů se snižuje úhel náběhu, tím se zvýší kritická rychlost torzní divergence, ale sníží se kritická rychlost reverze řízení. Při záporném úhlu šípů je tomu právě naopak - zvýší se úhel náběhu, klesne kritická rychlost torzní divergence a zvýší se kritická rychlost reverze řízení. [2]

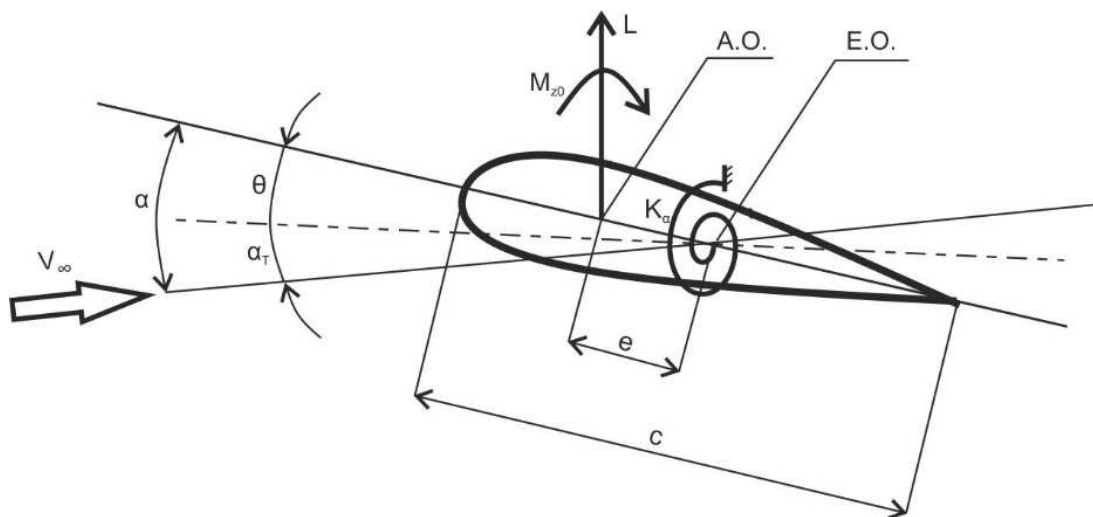
### 2.2.1 Změna rozložení aerodynamického zatížení

Působením statického aerodynamického zatížení se konstrukce deformuje a tato deformace zpětně ovlivňuje aerodynamické zatížení. Výsledné zatížení a tím způsobená deformace určují stav přerozdělení zatížení. Důsledkem přerozdělení zatížení může dojít k posuvu neutrálního bodu (změny statické stability) a také ke snížení účinnosti řízení, které může vést až k reverzi řízení. Zatížení od aerodynamických sil je na deformaci závislé lineárně a na rychlosti letu kvadraticky. [3]

### 2.2.2 Torzní divergence

Při malém úhlu náběhu a nulové rychlosti nerozrušeného proudu vzduchu bude úhel zkroucení roven nule. Při zvyšování rychlosti se budou zvětšovat aerodynamické síly a tím se bude zvětšovat výsledný úhel náběhu, což povede k dalšímu růstu aerodynamických sil. Tento proces bude probíhat, dokud bude nastávat rovnováha mezi elastickými silami a vnějším zatížením. Ve chvíli, kdy se dosáhne rychlosti, ve které nenastane tato rovnováha, tzv. kritické rychlosti torzní divergence, dosáhne se počátku ztráty statické aeroelastické stability. V případě, že bychom měli absolutně tuhé křídlo, zůstával by úhel náběhu konstantní a zvětšovaly by se pouze aerodynamické síly, úměrně kinetickému tlaku. [2] [3]

Z výše uvedeného je patrné, že nelze zabránit vzniku torzní divergence zvýšením tuhosti, avšak lze zvýšit hodnotu kritické rychlosti torzní divergence na takovou hodnotu, která bude bezpečná (bude vyšší než navržená nepřekročitelná rychlost letounu). [1]



Obr. 3 Dvourozměrová torzní divergence křídla [2]

Aerodynamický klopivý moment:

$$M_{\alpha} = M_{z0} + e \cdot L \quad (2.1)$$

Elastický moment:

$$M_{\theta} = -K_{\alpha} \cdot \theta \quad (2.2)$$

Záporné znaménko vyjadřuje direkční charakter vnitřních elastických sil. [2]

Teoretická podmínka dvourozměrové torzní divergence:

$$K_{\alpha} - \bar{e} \cdot q \cdot c^2 \cdot c_L \cdot \alpha = 0 \quad (2.3)$$

Z této podmínky lze určit hodnotu kinetického tlaku:

$$q = \frac{K_{\alpha}}{\bar{e} \cdot c^2 \cdot c_L \cdot \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \quad (2.4)$$

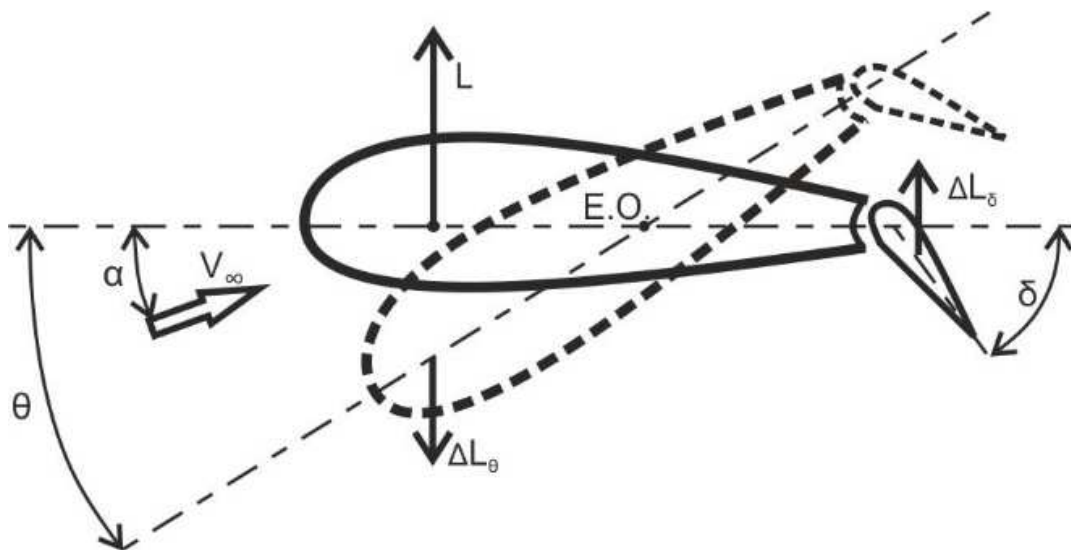
Kritická rychlost torzní divergence:

$$v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot K_{\alpha}}{\rho \cdot \bar{e} \cdot c^2 \cdot c_L \cdot \alpha}} \quad (2.5)$$

Z uvedeného vztahu pro kritickou rychlost torzní divergence vyplývá, že tato hodnota není závislá na počátečním úhlu náběhu, neovlivní ji ani klopivý moment při nulovém součiniteli vztlaku. Kritická rychlost torzní divergence je závislá na torzní tuhosti, vztlaku, hloubce křídla, hustotě vzduchu a také na poměrné vzdálenosti mezi elastickou a aerodynamickou osou. Torzní divergenci má smysl počítat pouze v případě, kdy je hodnota této poměrné vzdálenosti kladná, jelikož z rovnice (2.3) je zřejmé, že v případě, kdy bude tato hodnota záporná, nelze podmínku dvourozměrové torzní divergence splnit.

### 2.2.3 Snížení účinnosti a reverze řízení

Přerozdělené zatížení na křídle, případně na ocasních plochách při výchylce kormidel může způsobit vyvození opačných sil proti silám od vychylek kormidel a tím snižovat účinnost řízení. V krajním případě snížené účinnosti řízení dochází k tzv. reverzi řízení, kdy účinek aerodynamických sil od kormidel je zcela eliminován aerodynamickými silami deformovaných ploch, které působí v opačném smyslu. Na rozdíl od torzní divergence nevede reverze řízení ke ztrátě stability a tím zničení letounu, ale má za následek ztrátu říditelnosti letounu. Ve většině případů, které nastaly, došlo k reverzi příčného řízení, avšak tato reverze může v důsledku nedostatečné ohybové tuhosti trupu nastat i u podélného řízení. Aeroelasticita si zde opět klade za cíl určit kritickou rychlost letu, při které tento jev nastane. [2] [3]



Obr. 4 Reverze příčného řízení [4]

Princip vzniku reverze křidélek ukazuje obrázek 4. Vychyluje-li se křídélko o úhel  $\delta$ , vyvozuje se požadovaná řídící síla. Pokud bychom měli absolutně tuhé křídlo, pak by výchylka křídélka představovala daný přírůstek vztlaču, který by plně odpovídal řídící síle. U reálné konstrukce tomu tak bohužel není. Výsledná síla je při dané výchylce křídélka menší, než by byla u dokonale tuhé konstrukce, jelikož současně vzniká záporný klopivý moment, který naklápí profil na menší úhel náběhu. Původní úhel náběhu je tedy snížen o úhel zkroucení, který je závislý na výchylce křídélka. [2]

Při zvyšování rychlosti letu se bude úhel zkroucení zvětšovat, úhel náběhu snižovat a bude docházet k poklesu řídícího účinku. Pokud dojdeme až do stavu kritické rychlosti reverze řízení, nebudeme schopni ani při plné výchylce kormidel příčného řízení schopni vyvodit řídící účinek. Přírůstek vztlaču vyvolaný výchylkou křídélka bude roven poklesu vztlaču způsobený zmenšením úhlu náběhu. Pokud se překročí tato kritická rychlost, dojde k obrácení řídícího účinku křídélka. I v tomto případě, pokud je cílem získat osvědčení pro daný letoun, musí se prokázat, že k reverzi nedojde dříve než při překročení navržené nepřekročitelné rychlosti. [2]

### 2.2.4 Statická stabilita poddajného letounu

Statickou stabilitou se rozumí schopnost po vychýlení z rovnovážné polohy vyvozovat vratné momenty, které budou směřovat k obnově původního režimu. Pro posuzování statické stability letounu se používá tzv. statická zásoba, která je rovna vzdálenosti mezi těžištěm a neutrálním bodem. Poloha neutrálního bodu tuhého a netuhého letounu se však může lišit v důsledku netuhé konstrukce. Tento posun vlivem přerozdělení zatížení může negativně ovlivnit právě statickou stabilitu letounu. [3] [5]

## 2.3 Dynamické aeroelastické jevy

Na rozdíl od statických aeroelastických jevů, které vznikají za přítomnosti aerodynamických a elastických sil, se u dynamických jevů vyskytují všechny tři druhy sil, tzn. i síly setrvačné. Působením těchto sil vzniká buď samobuzené, nebo buzené kmitání. Z toho je zřejmé, že zatížení se s časem mění a deformace mají vratný charakter (kmity).

Základní rozdělení dynamických aeroelastických jevů:

- flutter (třepetání)
- bufetting (třepání)
- aeroelastická odezva na dynamické zatížení
- dynamická stabilita a říditelnost netuhého letounu [2] [3]

### 2.3.1 Flutter

Flutter, neboli třepetání, je zřejmě nejnebezpečnější dynamický aeroelastický jev. Je to samobuzené kmitání např. soustavy křídlo/křídélko, ocasní plocha/kormidlo, ohybově-torzní kmitání ocasních ploch nebo křídla, nacházející se v proudu vzduchu. Pro vznik tohoto jevu jsou nejdůležitější aerodynamické síly, které na tělese vznikají v důsledku jeho pohybu v proudu vzduchu. Toto samobuzené kmitání vznikne tehdy, když ztráty energie v důsledku konstrukčního tlumení budou menší než přívod energie z proudu vzduchu. Řešení flutteru se zaměřuje opět na zjištění kritické rychlosti, tzv. kritické rychlosti flutteru, při které dojde k přechodu z konvergentního na divergentní kmitání (nastane harmonické ustálené kmitání). Při překročení této kritické rychlosti dojde vlivem divergentních kmitů ke katastrofické destrukci konstrukce. [2] [3] [6]

Podle charakteru obtékání rozlišujeme dva druhy flutteru:

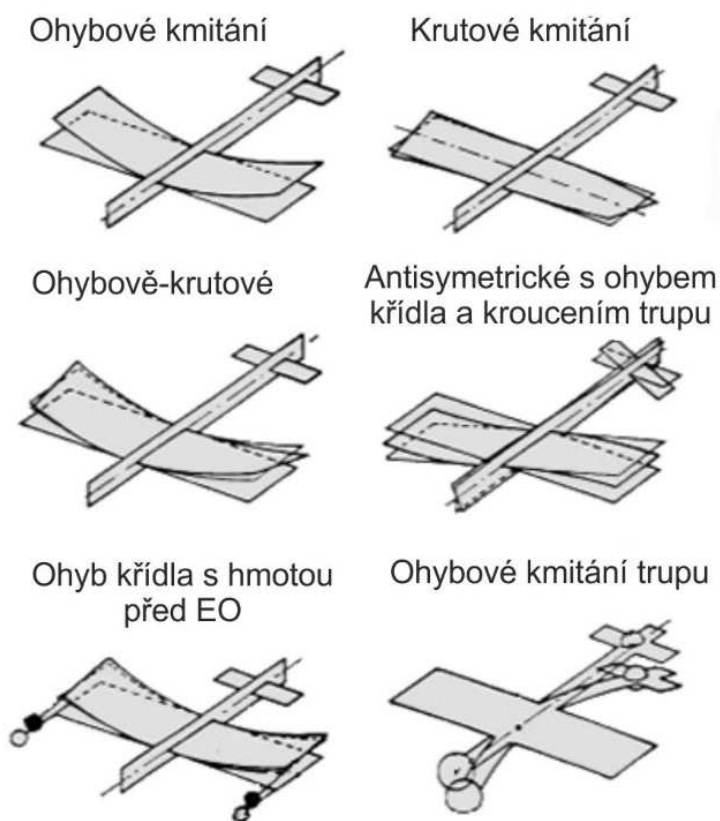
- flutter v potenciálním proudu bez odtržení
- flutter s odtržením proudu

Flutter v potencionálním proudu bez odtržení (klasické třepetání) je takový jev, při kterém mezní vrstva významně neovlivňuje aerodynamické síly a tím charakter třepetání. Vznik flutteru s jedním stupněm volnosti (např. krut) je pouze teoretický, jelikož vzniklé aerodynamické síly nevyvodí jako reakci, např. na čistě torzní impuls, pouze silovou dvojici k elastické ose, ale i vztlak vyvolávající ohyb. Tento druh flutteru tedy může nastat až od dvou stupňů volnosti v důsledku fázového posunu mezi složkami výsledného pohybu soustavy. [2] [3]

U flutteru s odtržením proudu může nastat flutter i při jednom stupni volnosti. Jde o druh třepetání, při kterém mezní vrstva ztrácí stabilitu, odtrhne se a dojde ke vzniku intenzivních vírů, které mají velký vliv na charakter flutteru. Aerodynamické podklady pro tuto oblast jsou v důsledku složitých nelinearit získávány převážně experimentální cestou.

Nejvýznamnější druhy potencionálního flutteru:

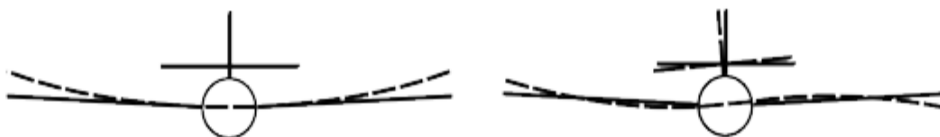
- ohybově-kroutivý flutter
- ohybově-křídélkový flutter
- ohybově-kroutivý flutter za účasti vychylování křidélek nebo kormidel
- ohybově-kroutivý flutter nosné plochy s kormidlem a pomocnými ploškami [2] [3]



Obr. 5 Ukázka některých druhů flutteru [1]

Při ohybově-kroutivém flutteru se nevychylují kormidla a dochází při něm ke složeným ohybovým a kroutivým deformacím nosných ploch. Ohybově-křídélkový flutter je charakterizován především ohybovým kmitáním křídla s vychylováním křídélka v důsledku nedostatečného vyvážení kormidel. Kombinací předchozích dvou případů je ohybově-kroutivý flutter za účasti vychylování křidélek nebo kormidel. Nejsložitějším případem je ohybově-kroutivý flutter nosné plochy s kormidlem a pomocnými ploškami, který představuje složitou a nebezpečnou vícestupňovou dynamickou aeroelastickou nestabilitu. [2] [3]

Flutter můžeme také z hlediska tvaru kmitání rozlišit jako symetrický nebo nesymetrický.



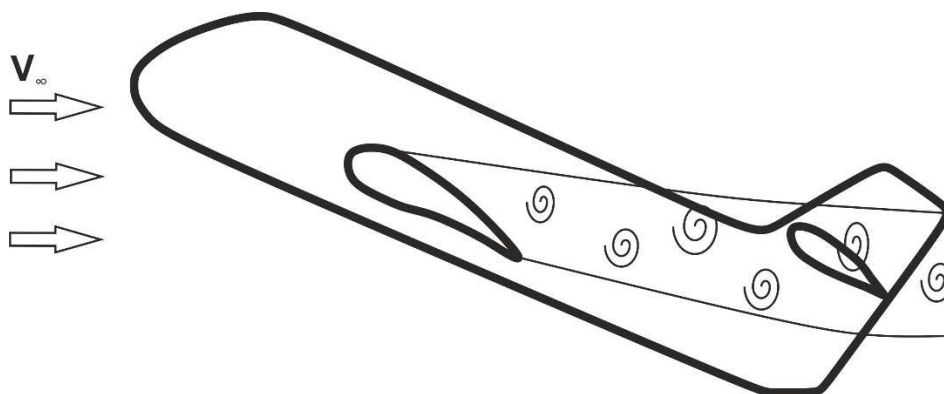
Obr. 6 Symetrický a nesymetrický ohybově-křídélkový flutter [7]

„Vážným problémem, který může přispět k rozvoji flutteru jsou hmotově nevyvážené řídicí plochy, obzvláště křídélka. Proto je žádoucí, přesto, že úplné hmotové vyvážení kormidel je velmi náročné na zvyšování hmotnosti, tato kormidla vyvážit alespoň částečně. Dalším nebezpečím, podporujícím vznik flutteru, jsou vůle v ovládání kormidel, které dovolí při zcela zablokované řídicí páce i třeba jen velmi malé vychýlení kormidla. K tomu je potřeba říci, že takový ovládací systém, v němž vůle vůbec nejsou, není možný. Je však třeba důsledně dbát na to, aby vůle na novém letounu byly nejmenší možné, a v průběhu provozu je nutné důsledně kontrolovat, aby se nepřípustně nezvětšovaly opotřebením.“ [1]

### 2.3.2 Buffeting

Buffeting (třepání) není na rozdíl od flutteru jev samobuzený, ale je vyvolaný účinky periodicky se odtrhávajících vírů v místech náhlých změn tvarů. Nejčastější příčinou odtrhávání je příliš velký úhel náběhu letounu. Nejčteněji se buffeting vyskytuje u ocasních ploch, jelikož leží v úplavu za křídlem, ale může se vyskytnout i na samotném křídle, především vlivem rázových vln při vysokých rychlostech. Víření působí jako budící síla, která rozkmitává jednotlivé části letounu a v důsledku může dojít až k flutteru (především k flutteru s odtrženou mezní vrstvou při vyšších úhlech náběhu). [2] [3] [6]

Vlivem buffetingu nedojde k destrukci konstrukce, jak je tomu u flutteru, ale vzniká při něm nepřípustné chvění, které je nevhodné jak z hlediska pohodlí cestujících, tak hlavně z pohledu únavy. Teoretické řešení buffetingu je velmi obtížné, proto se většinou omezujeme na vyšetření hranice přechodu z buffetingu na flutter. Hlavním předpokladem, jak předejít tomuto jevu, je dodržení co možná nejčistších přechodů mezi plochami a volba umístění jednotlivých konstrukčních prvků tak, aby nespádaly do cesty proudu zvířeného některou z částí ležící v přední části, tzv. úplavu.



Obr. 7 Ukázka podmínek pro vznik buffetingu [3]

### 2.3.3 Aeroelastická odezva na dynamické zatížení

Tento jev může být například vyvolán střídavým účinkem vzestupných a sestupných vzdušných poryvů, při přistávacím rázu, odhozu nákladu, pojiždění po zemi nebo interakcí s rázovou vlnou. Odezva na dynamické zatížení může být tlumená (podvozek) nebo netlumená. Změny zatížení v čase musejí být dostatečně rychlé, aby umožnily vznik nezanedbatelných setrvačných sil. Mezi základní dynamické aeroelastické odezvy patří odezva konstrukce na impulzní zatížení (krátkodobý účinek vnějšího zatížení). [3] [6]

V krajních případech může tento dynamický aeroelastický jev vést k velkému namáhání konstrukce a zhoršit stabilitu při dojezdu letounu (poslední fáze přistání). Někdy mohou, vlivem dynamického rázu jako počátečního impulsu a následné odezvy, vzniknout podmínky vhodné pro vznik některého z druhů fluteru. [2]

### 2.3.4 Dynamická stabilita a říditelnost

Tato problematika se zabývá letovými vlastnostmi základního pohybu letounu s uvažováním vlivu deformace. Deformace konstrukce může ovlivnit dynamickou stabilitu letounu (počáteční odchylka trajektorie letu nebude tlumena a pohyb letounu nebude konvergentní). Může také nastat situace, kdy letoun sice bude dynamicky stabilní, avšak ne dostatečně tak, jak je požadováno. [3]

## 2.4 Konstrukční tlumení

Tato kapitola byla zařazena do aeroelastických jevů konstrukcí, jelikož stručně charakterizuje jednu z možností, jak působit proti kmitům a tím oddalovat kritické stavy dynamických aeroelastických jevů.

Reálná konstrukce, na rozdíl od ideální pružné konstrukce, utlumuje deformační kmity postupně – disipuje mechanickou energii. Pro modelování vlivu disipace energie na změnu pohybu se zavádí síly, které působí proti pohybu – tlumící síly. Existují základní modely tlumících sil konstrukčního tlumení, avšak ve výsledku je většinou tlumení kombinací jednotlivých složek, z nichž jedna obvykle převládá. [3]

Základní modely tlumících sil konstrukčního tlumení, které se vyskytují v leteckých konstrukcích:

- viskózní tlumení
- materiálové tlumení
- smykové tření (Coulombovo tlumení) [3]

Model viskózního tlumení se používá tam, kde je konstrukce vystavena te-  
kutině a viskózní síly jsou pak úměrné rychlosti pohybu. Úhlová frekvence tlumených kmitů pak bude menší než vlastní frekvence a tím se prodlouží perioda tlumených kmitů vůči vlastnímu kmitání. *„Bude-li na hmotný bod s viskózním tlumením působit harmonická budící síla, ustálí se pohyb po určité době prakticky na harmonických kmitech s fázovým posunem. Amplituda i fázový posun vynucených kmitů závisí na tlumení i budící frekvenci, frekvence vynucených kmitů je dána frekvencí budící.“* [3]

Materiálové (vnitřní) tlumení vzniká třením mezi molekulami materiálu. Tlumící síly jsou závislé na vnitřním pnutí v materiálu (rostou s velikostí pružných

deformací). Toto tlumení se při zatěžování a odlehčování nechová lineárně, ale hysterézně - deformace bude sledovat sílu se zpožděním. Tlumící síla je ve fázi s rychlostí deformace a je úměrná velikosti elastické síly. [3]

Smykové tření vzniká na stýkajících se suchých plochách pohybujících se těles (závěsy otočných ploch s kluznými ložisky bez maziv,...). Toto tření je úměrné přítláčné síle, působí proti směru pohybu a je nezávislé na jeho rychlosti. Frekvence pohybu se nemění, odpovídá vlastní frekvenci pohybu a vlivem trvalého lineárního poklesu amplitud se po konečném počtu kmitů pohyb zastaví. [3]

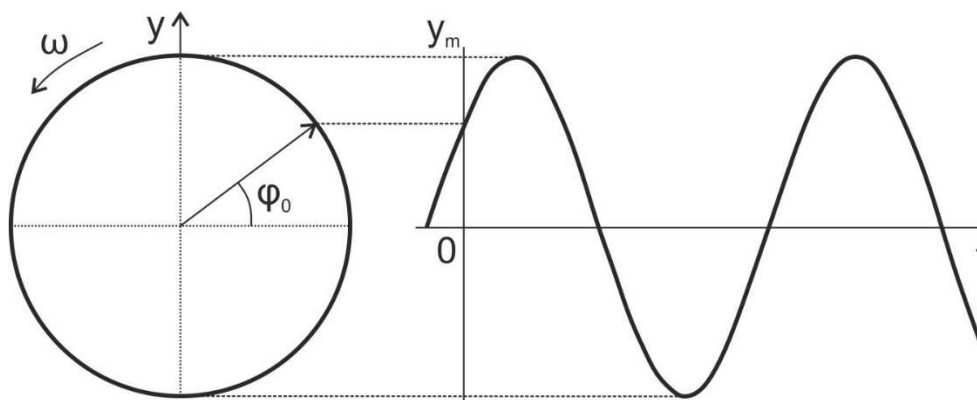
### 3 KMITÁNÍ LETECKÝCH KONSTRUKCÍ

Abychom mohli popsat dynamiku netuhých konstrukcí letounů, musíme brát v úvahu všechny síly, které na něj působí. Tyto síly můžeme rozdělit například takto:

- aerodynamické síly – draku (vztlak, odpor, příčná síla) nebo propulzní síly (tah pohonných jednotek)
- hmotnostní síly – gravitační a setrvačné síly, gyroskopické momenty
- vazbové síly
- elastické síly – vnitřní síly, které vznikají díky pružnosti konstrukce při jeho deformaci
- ostatní síly – balistické atd. [8]

#### 3.1 Kinematika kmitavého pohybu

Za kmitavý pohyb považujeme pohyb, při kterém se hmotný bod nebo těleso pohybuje kolem rovnovážné polohy (místo s nejmenší potencionální energií) po úsečce nebo kruhovém oblouku. Základní veličinou kmitavého pohybu je perioda  $T$ , která zastupuje čas, v jakém proběhne jeden kmit (oscilátor dospěje do stejné polohy jako ve výchozím čase). Počet těchto opakování za sekundu vyjadřuje frekvence (kmitočet)  $f$ . [9]

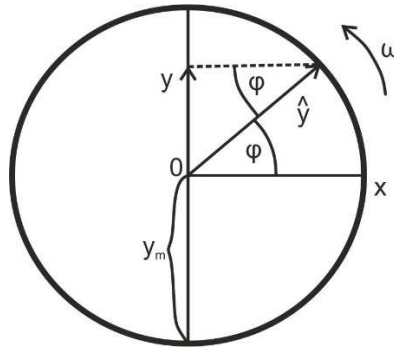


Obr. 8 Harmonický kmitavý pohyb [10]

Pohyb, při kterém je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy  $y$  závislá na funkci sinus, se nazývá harmonický pohyb. Při pohybu oscilátoru



se okamžitá výchylka mění, může nabývat kladných i záporných hodnot a v určitých časech dosáhne svého absolutního maxima, které se označuje jako amplituda výchylky.



Obr. 9 Geometrie kmitání [9]

$$\text{Okamžitá výchylka je rovna: } y = \hat{y} \cdot \varphi = \hat{y} \cdot \omega \cdot t \quad (3.1)$$

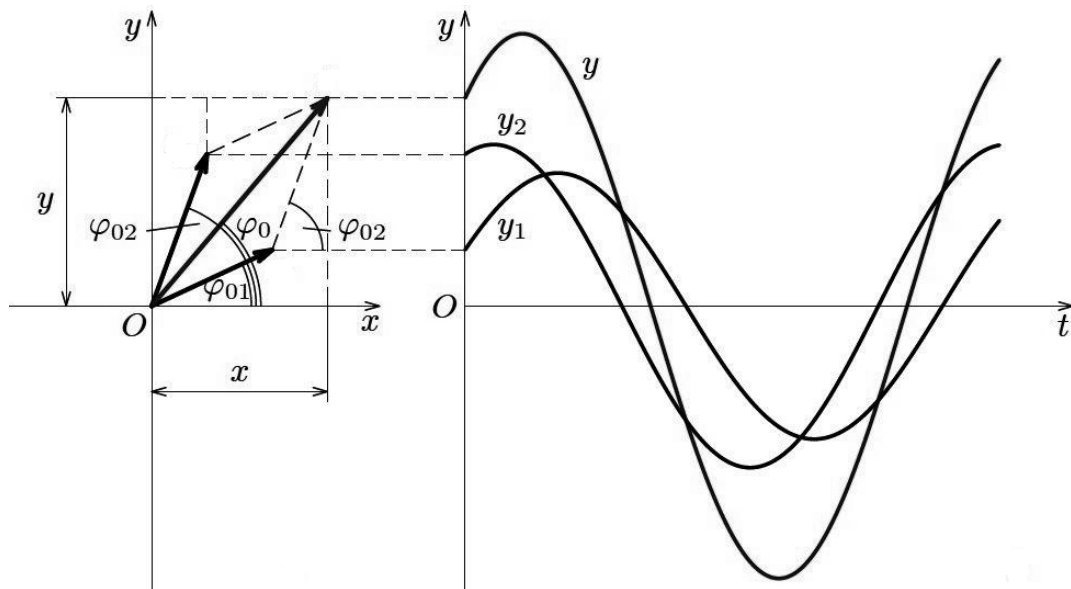
kde úhel  $\varphi$  je fáze kmitavého pohybu a  $\hat{y}$  je vektor ležící v ose  $y$ .

$$\text{Pro úhlovou frekvenci } \omega \text{ platí: } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (3.2)$$

$$\text{Rychlost harmonického pohybu: } v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \quad (3.3)$$

$$\text{Zrychlení: } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (3.4)$$

Při skládání více pohybů se uplatňuje princip superpozice. Jestliže těleso nebo hmotný bod kmitá několika harmonickými pohyby téhož směru, pak výsledná okamžitá výchylka je součtem jednotlivých výchylek. Pokud se skládá více harmonických pohybů se stejnou frekvencí, bude mít i výsledný pohyb stejnou frekvenci, avšak bude mít amplitudu závislou na amplitudách jednotlivých skládaných harmonických pohybů. Pokud kmity nemají stejnou frekvenci, vznikají složité kmity s neharmonickým průběhem. [11] [12]



Obr. 10 Skládání kmitavého pohybu [11]

Harmonické kmitání můžeme rozdělit do těchto skupin:

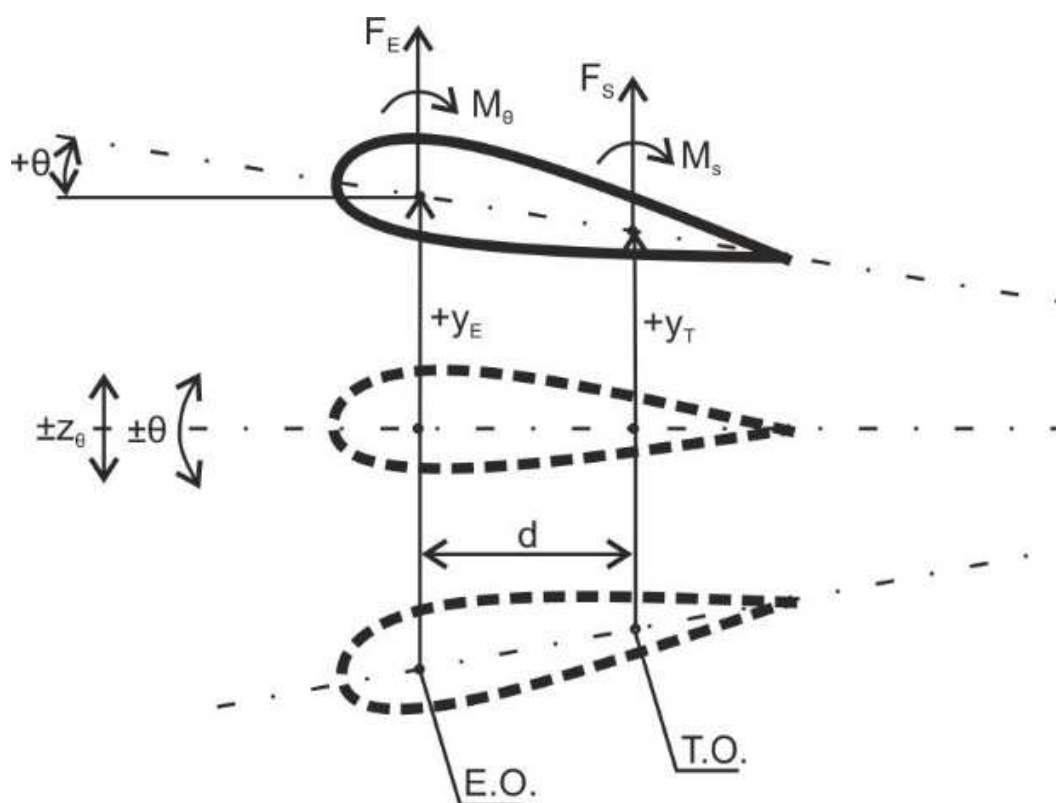
- vlastní (volné) kmitání
- vynucené (buzené) kmitání
- samobuzené kmitání (flutter)

Vlastní kmitání dynamického systému odpovídá pohybu této soustavy při nulových vnějších silách. Vlastní kmity jsou tedy způsobeny působením vnitřních sil soustavy. Znalost vlastních frekvencí, tvaru kmitání a základních charakteristik vlastního kmitání je velmi důležitá při snaze analyzovat dynamické aeroelastické jevy. [2] [3]

### 3.2 Kmitání křídel a ocasních ploch

Vlastní kmitání křídla závisí na vzájemné poloze elastické a těžištní osy. Pokud by tyto osy splývaly, vzniklo by buď čistě ohybové, nebo čistě krouivé kmitání křídla, v závislosti na počátečním impulsu, který kmitání vyvolá. U reálných křídel není tato rovnost zachována, a proto tyto křídla kmitají složeným ohybově-krouitvým vlastním kmitáním. [2]

Po přivedení křídla do vlastního harmonického kmitání nastane vertikální přemísťování elastické osy a natáčení křídla kolem této osy.



Obr. 11 Pohyb řezu křídla při ohybově-krouitvém kmitání [2]

## 4 PŘÍBLIŽNÉ METODY ŘEŠENÍ VLASTNÍCH TVARŮ A FREKVENCÍ

### 4.1 Teoretické metody řešení

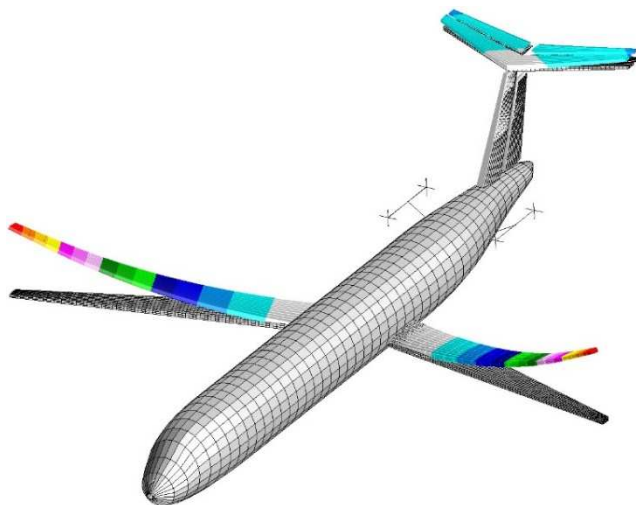
Výpočet vlastních frekvencí jednotlivých částí letounu lze provést několika různými numerickými metodami. Většina metod řeší diferenciální rovnice kmitání nosníku s proměnnými geometrickými a strukturálními parametry podél rozpětí. V minulosti byl k výpočtu používán model jednostranně vetknutého nosníku z důvodu zjednodušování, v současné době se používají složitější modely, především modely celých částí při využití metody konečných prvků (MKP). Je možné najít celou řadu metod, vyvinutých k řešení vlastních tvarů a frekvencí, v této práci budou krátce zmíněné tři z nich – Rayleighova metoda, MKP a Fourierova transformace. [6]

#### 4.1.1 Rayleighova metoda výpočtu vlastní frekvence

Tato metoda využívá principu rovnosti kritické a maximální energie při kmitání a je využitelná především pro soustavy harmonicky kmitající. Jelikož je založena na zákonu o zachování energie, počítá s tím, že při volném harmonickém kmitání soustavy, kde se zanedbává tlumení (bez ztrát), je maximální potenciální energie (maximální výchylka soustavy) rovna maximální kinetické energii (průchod soustavy rovnovážnou polohou). Přesnost výpočtu je závislá na volbě aproximace průhybové křivky (úhlu zkroucení) kmitajícího modelu. Přesný výsledek však nezaručuje ani správný odhad této křivky, jelikož se při výpočtu používá méně přesné numerické integrace nebo sumace po úsecích modelu. Pokud nemáme dostatek informací o možném tvaru kmitání, používá se tvar deformace odpovídající kmitání nosníku s konstantním průřezem po rozpětí.

#### 4.1.2 Metoda konečných prvků

V moderních numerických analýzách má MKP dominantní postavení. Základem je vytvoření sítě z prvků konečných rozměrů na zkoumaném modelu, přidělení charakteristik jednotlivým prvkům a zkoumání odezvy na zatížení. Výhodou této metody je, že dokáže řešit komplexně složitá tělesa, kdežto analytický přístup řeší tělesa elementární, která se ve strojírenské oblasti vyskytují zcela výjimečně. Nevýhodou této metody je, že při každé změně modelu nebo vstupních parametrů musíme analýzu provést znovu. Tato metoda bude do budoucna využívána ve stále větší míře, avšak musíme si uvědomit, že ani tato metoda není dokonalá, a proto je nezbytnou nutností znalost základních numerických metod, aby bylo možné posoudit reálnost výsledků získaných metodou konečných prvků. [13]



Obr. 12 Metoda konečných prvků [14]

### 4.1.3 Fourierova transformace

Fourierova transformace je jedna z matematických metod používaná k analyzování signálů. Základní vzorec Fourierovy transformace je integrálem a pro praktické využití není příliš vhodný. Z tohoto důvodu byl vytvořen polynom, jehož vstupy a výstupy jsou posloupnosti hodnot (diskrétní Fourierova transformace), avšak s rostoucí délkou vstupní posloupnosti roste i její náročnost. Proto byl vytvořen algoritmus, který vychází z vlastností exponenciálních diskretních funkcí a tím snižuje časovou výpočetní náročnost (rychlá Fourierova transformace). Vzorec pro diskretní Fourierovu transformaci rychlým algoritmem:

$$b_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{2\pi i j k / N} \quad (4.1)$$

Taktéž platí zpětná transformace:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-2\pi i j k / N} \quad (4.2)$$

kde  $a$  je vektor o  $N$  komplexních složkách;  $i$  je imaginární jednotka;  $k=0$  až  $N-1$ ;  $j=0$  až  $N-1$  a  $b$  je vektor o  $N$  komplexních složkách, získaný transformací vektoru  $a$ . [15] [16]

Rychlá Fourierova transformace bude využívána k analýze vlastních frekvencí v experimentálním měření. Výpočet rychlé Fourierovy transformace je zpracován v programu Matlab, který bude použit k vyhodnocování výsledků.

Teoretický rozbor dynamického chování leteckých konstrukcí je nezbytně nutný, avšak nedostačující k získání průkazu odolnosti letounu proti vzniku aeroelastických jevů. Všechny aeroelastické výpočty jsou jen odhadem kritických rychlostí, které mohou být více či méně přesné, v závislosti na přijatých zjednodušeních, použitých metodách výpočtu a přesnosti vstupních údajů. Z tohoto důvodu je nutné experimentální ověření dynamického chování konstrukce a tím podpoření teoretických poznatků v průběhu vývoje letounu i při prokazování aeroelastické odolnosti. [2]

## 4.2 Experimentální řešení

Tato diplomová práce má za účel především vytvořit metodiku měření experimentální optickou metodou, která povede k zjišťování vlastních tvarů a frekvencí, proto je vhodné se v krátkosti seznámit s některými metodami, které jsou již běžně používány v této oblasti.

### 4.2.1 Experimentální modální analýza

Cílem experimentální modální analýzy je pomocí lineárního matematického modelu s konečným počtem stupňů volnosti popsat dynamické chování mechanického systému. Při experimentální vibrační analýze se nejdříve změří vhodné množiny frekvenčních odezvových funkcí, poté se data analyzují (vytvoří se modální model) a v případě nutnosti se provádějí další výpočty. V teoretické analýze probíhá tento děj naopak. [17] [18]

Pro modální analýzu je důležitý především typ uložení a buzení struktury, správné snímání měřených veličin a vhodné zpracování signálu. Způsob uložení a buzení je závislý na účelu modální analýzy. Rozlišujeme tyto způsoby uložení:

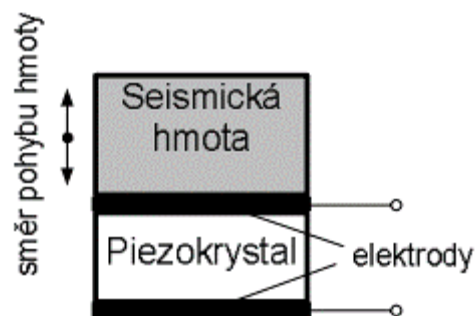
- volné – nejjednodušší, používaný především pro korelaci experimentálního a teoretického modelu
- vetknuté – pevné uchycení v některých bodech modelu
- na místě (v provozních podmínkách) – používá se, pokud zjišťujeme modální parametry v reálných podmínkách a nebude se provádět korelace s výpočtovým modelem [18]

Buzení můžeme provádět dvěma základními způsoby - dynamickým budičem vibrací (harmonický signál, náhodný signál,...) nebo impulsním buzením (rázové kladívko, náhlé uvolnění z deformované pozice). [18]

Snímače, které snímají síly a odezvy, musí mít přiměřený měřicí rozsah a nesmí výrazně ovlivňovat strukturu. Nejčastěji se snímá odezva piezoelektrickými snímači (např. akcelerometry) ve formě zrychlení. Snímače se vhodně umísťují na měřený objekt tak, aby měřily přesně ten parametr, který potřebujeme a co nejméně ovlivňovaly měření. Musíme také přihlídnout k hmotnosti snímače a hmotnosti struktury, aby snímače neovlivňovaly dynamické vlastnosti struktury. Hmotnost snímače by měla být menší než 10% hmotnosti struktury. Může se ovšem stát, že lehký snímač nebude mít dostatečnou citlivost. V takovémto případě se používá bezdotykové měření např. laserovým snímačem vibrací nebo jinou optickou metodou (např. Pontos). [18]

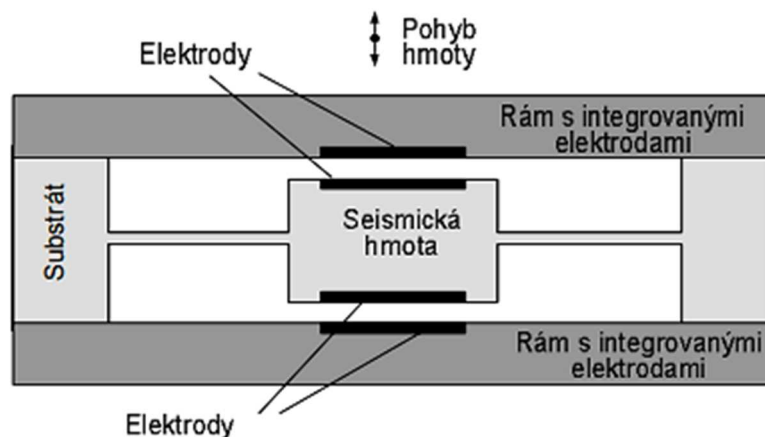
Jak již bylo uvedeno výše, jako snímač se nejčastěji používá akcelerometr. Akcelerometr je elektromechanické zařízení, které měří dynamické nebo statické zrychlení. Dynamické zrychlení vzniká změnou rychlosti pohybujícího se předmětu, statické působením gravitace. Akcelerometry se používají v různých odvětvích a mají mnoho využití: měření vibrací, natočení, náklonu, pohybu a rychlosti, odstředivé síly, ale třeba i seismické aktivity. Skládají se ze základny, která bývá pevně spojená s měřeným objektem, dále pak z pružně uložené setrvačné hmoty, u které se vyhodnocuje její výchylka vůči základně, a z tlumení. Tyto snímače pracují buď na základě piezoelektrického jevu, piezoodporového jevu nebo například na snímání kapacitance. Podmínkou pro měření zrychlení kmitání pomocí akcelerometru je velká rezonanční frekvence. [19] [20]

Piezoelektrické akcelerometry měří polohu seismické hmotnosti vůči pouzdru senzoru (piezoelektrické napětí). Výhodou těchto snímačů je malá citlivost k rušivým vlivům (teplotní dilatace,...), ale nejde jimi měřit statické zrychlení. Používají se k měření zrychlení při vysokých hodnotách frekvence. [20]



Obr. 13 Schéma piezoelektrického akcelerometru [20]

Piezoodporové (tenzometrické) akcelerometry pracují na principu zjišťování napětí na základě deformačních změn materiálu. Pohybem hmoty tělesa dochází ke změně ohmického odporu, který snímač vyhodnotí. Kapacitní akcelerometry mají pevné elektrody, které tvoří vůči seismické hmotě kapacity. Při pohybu hmoty dochází ke změně vzdálenosti elektrod a tím i ke změně kapacit (jedna z kapacit klesá, druhá stoupá). [20]



Obr. 14 Schéma základního kapacitního akcelerometru [20]

#### 4.2.2 Bezkontaktní měření vibrací pomocí laseru

Laserové vibrometry se používají především tam, kde nelze použít akcelerometry, především když nedosahují požadovaných parametrů nebo nejdou použít z provozních důvodů (měření pod vodou, na měřené těleso nelze umístit akcelerometr atd.). Laserové interferometrické vibrometry jsou založené na Dopplerově efektu, který spočívá ve zjištění, že frekvence vlnění zjištěná pozorovatelem je jiná než frekvence vlnění zdroje, jestliže se mění vzdálenost v čase tohoto zdroje od pozorovatele. Pokud se pozorovatel (snímač) vzdaluje od zdroje, pak se frekvence snižuje a naopak. Princip laserového bezkontaktního měření vibrací je založen na interferenci dvou koherentních, lineárně polarizovaných světelných paprsků. Pro provozní účely se světlo laseru přivádí vláknovým ohebným světlovodem do optické hlavičky, kde se pomocí objektivu koncentruje do zvoleného bodu na povrchu měřeného tělesa. Systémy s více hlavicemi umožňují měření vibrací v 3D rozměrech a skenování vibrací na větší ploše povrchu měřeného objektu. [21]

### 4.2.3 Bezkontaktní měření systémem Pontos

Pontos je mobilní optický systém pro dynamické měření pohybu diskretních bodů, vibrací a deformací. Pontos je vybaven dvěma kamerami, které jsou synchronizovány a zaznamenávají snímky ve stereo nastavení. V těchto snímcích jsou zachyceny a graficky zobrazeny 3D souřadnice referenčních značek a jejich posunutí v různých deformačních stavech během zatížení objektu. Tento systém je využíván především v leteckém a automobilovém průmyslu. [22]



Obr. 15 Kamery systému Pontos [23]

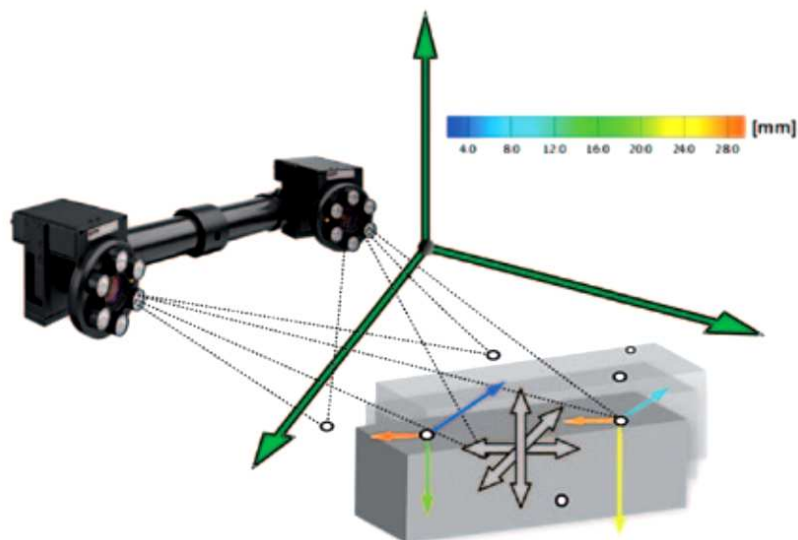
Dostupné varianty systému:

- PONTOS 5M – určen pro úlohy s vysokou přesností měření, snímkovací frekvence až 30Hz a rozlišení kamer 5 milionů pixelů. Systém je vhodný pro měření velkých i malých objektů.
- PONTOS 4M – systém podobný 5M, ale snímkovací frekvence až 480Hz.
- PONTOS 12M – frekvence snímání 24Hz při plném rozlišení a až 384Hz při částečném rozlišení.
- PONTOS HS – systém pro snímání velmi rychlých dynamických dějů, snímkovací frekvence je až 4000Hz. [22]

Metoda měření je založena na principu optické triangulace. Triangulace je v současnosti nejpoužívanější technikou optického měření. Přesto, že se jednotlivé varianty zdají velmi odlišné, jsou založené na stejných principech. Rozlišujeme tyto nejdůležitější techniky:

- aktivní triangulace
- pasivní triangulace (využívaná právě systémem Pontos)
- měřicí systémy s teodolitem
- fokusovací techniky
- techniky "podoba ze stínování"





Obr. 16 Princip měření systémem Pontos [23]

Princip měření je následující:

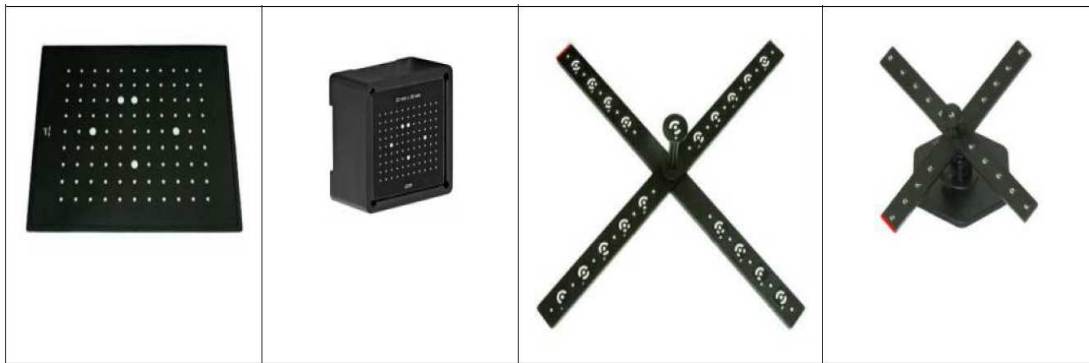
- kamerový systém se upevní na stativ před měřený objekt
- proběhne kalibrace systému
- na měřený objekt se připevní body, které bude systém snímat (počet bodů je neomezený a nezávislý na snímkovací frekvenci)
- systém podle zvolené frekvence vytvoří záběry, ze kterých vypočítá prostorové souřadnice, posunutí a deformace jednotlivých bodů
- následně může proběhnout analýza



Obr. 17 Vzhled snímaných bodů [23]

Kalibrace je operace, během které je měřicí systém pomocí kalibračních objektů upraven tak, že je zajištěna rozměrová konzistence. Během kalibrace je definována vzdálenost mezi referenčními body, vzdálenost a natočení kamer. Na základě těchto informací systém vypočítává ve 2D snímku jejich 3D souřadnice.





Obr. 18 Referenční kalibrační objekty [23]

Výstupy z měření:

- 3D souřadnice jednotlivých snímaných bodů
- posunutí, vektory deformace
- grafický a textový protokol měření

Výhody měření pomocí optického systému Pontos:

- bezkontaktní měření 3D souřadnic neomezeného počtu bodů
- mobilita, flexibilita, malá hmotnost
- měření, vizualizace a export 3D polohy a pohybů měřených bodů v různých stavech
- snímkovací frekvence není závislá na počtu měřených bodů
- nezávislost na okolních podmínkách, jako vibrace a změna světla

Oblast použití systému Pontos

- 3D měření pohybů, deformací a vibrací
  - ověření koncepčních designových návrhů a počítačových simulací
  - analýza sekvenčních pohybů
  - alternativa k měření s akcelerometry do 250 Hz
  - měření relativních pohybů
  - měření útlumu, kmitání a tuhosti
  - měření v aerodynamickém tunelu
  - zatěžování, tečení a zkoušky stárnutí
  - měření dynamického chování, nárůst a pokles strukturálního kmitání
- [22] [23]

## 5 FREKVENČNÍ ANALÝZA OPTICKÝM SYSTÉMEM PONTOS

Cílem experimentálních měření má být ověření, zda je frekvenční analýza optickým systémem Pontos konkurenceschopná, má dostatečnou přesnost a jaké jsou možnosti jejího využití.

K experimentu byl používán bezkontaktní mobilní optický systém Pontos 12M, s frekvencí snímání 24Hz při plném rozlišení a až 384Hz při částečném rozlišení od společnosti GOM a program PONTOS v6.3.0 64bit. K porovnání výsledků bylo použito měření akcelerometrem. Veškeré měření probíhalo na zkušebně Leteckého ústavu Vysokého učení technického v Brně.

Pro zjištění základních možností byla zvolena analýza vetknutých prutů (kruhového a obdélníkového průřezu) a dále pak analýza křídla letounu SportStar od společnosti Evector.

Postupy kalibrace, měření a analýzy budou popsány v následujících kapitolách na konkrétních aplikacích.



Obr. 19 Sestavený systém Pontos 12M

## 5.1 Frekvenční analýza vetknutých prutů

K měření frekvenční analýzy na prutech byly vybrány pruty:

- kruhového průřezu o průměru 5mm
- obdélníkového průřezu 1,4x7,4mm

Pruty byly jednostranně vetknuty a jejich délka vetknutí byla měněna, aby bylo dosaženo více variant experimentů.

### 5.1.1 Kalibrace systému


Základní princip kalibrace byl popsán v kapitole 4.2.3. Ke kalibraci je na výběr několik referenčních kalibračních objektů, které se volí podle toho, jak velký objekt se bude systém snímat. Při tomto měření byl zvolen kalibrační kříž, který je určen pro měření velkých objektů ze vzdálenosti větší než přibližně 4,5m.

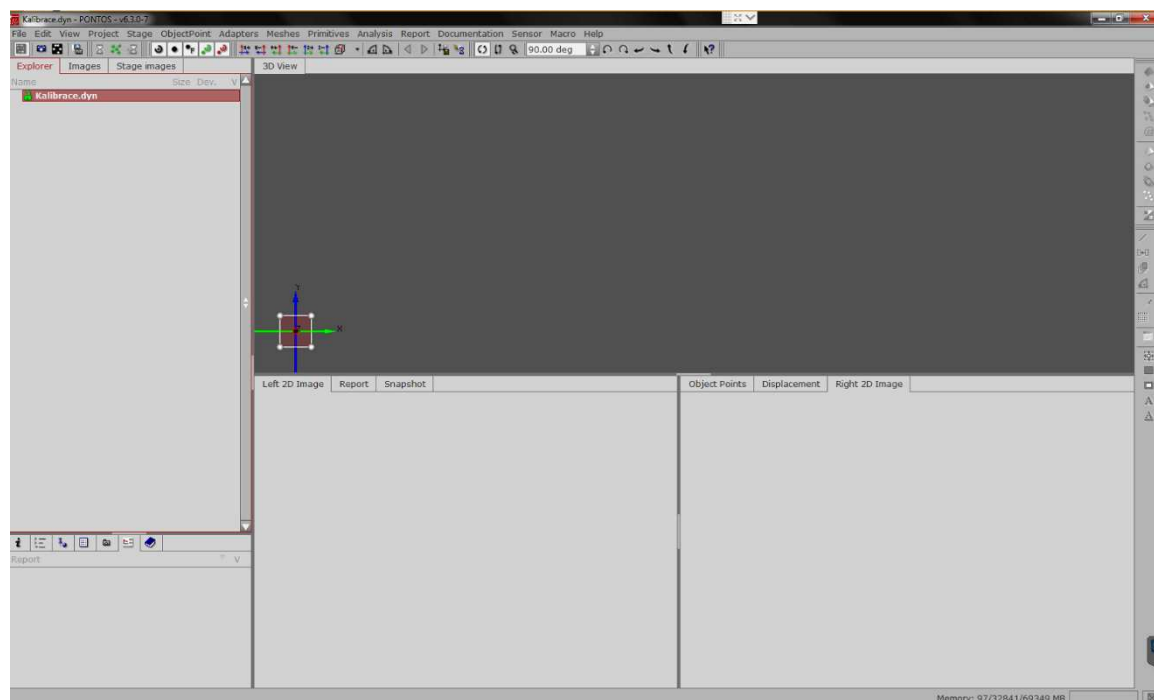


Obr. 20 Kalibrační kříž

Pro kalibraci je důležitá vzdálenost objektu (vzdálenost kalibračního kříže od kamer by měla být stejná jako vzdálenost kamer a měřeného objektu), dále pak osvětlení (co nejrovnoměrnější světlo, které dopadá na kalibrační, příp. měřený objekt) a správné nastavení kamer a systému.

Pro možnost kalibrace se po kompletaci optického systému a sestavení kalibračního kříže zapne systém a program Pontos. Po založení nového deformač-

ního projektu (File > New Deformation Project) se spustí kalibrace pomocí ikony , umístěné v levém horním rohu.

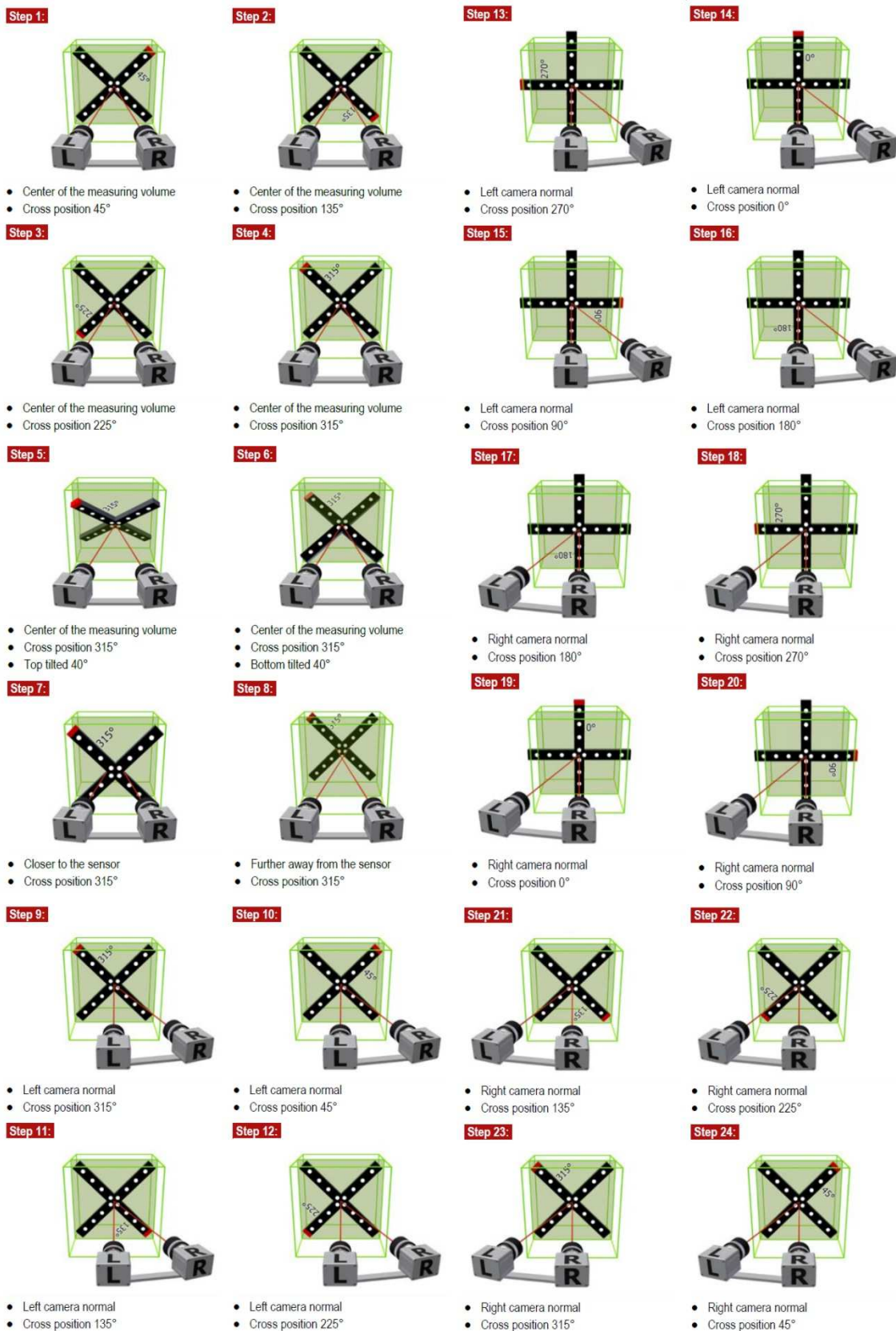


Obr. 21 Uživatelské prostředí programu Pontos

Aby mohl být systém správně kalibrován, je nutné zadat typ referenčního kalibračního objektu, velikost objektivů a teplotu místnosti, ve které se měření provádí. Důležitým faktorem pro správné měření je zaostření a správné natočení kamer. Kamery disponují laserovými paprsky, které jsou umístěné na kamerách a uprostřed základny, sloužícími k jednoduššímu natáčení kamer tak, aby se pohled z kamer setkával v jednom bodě. Kamerový systém je při kalibraci ustaven do takové výšky, aby se laserové paprsky setkávaly ve středu kalibračního kříže.

V případě kalibrace pro měření kmitání prutů byla vzdálenost kamer od kalibračního kříže 6,8 metru, byly použity čočky s ohniskovou vzdáleností 50 mm, clona nastavena na hodnotu 6,5 a nebylo použito žádné doplňkové osvětlení, kromě zabudovaného osvětlení v samotném systému (světla jsou rozmístěna okolo kamery, spouštějí se automaticky se zahájením snímání a lze je nechat aktivní nebo je při snímání vypnout).

Při kalibraci je kalibrační kříž ustavován do 24 různých poloh, při kterých se kříž otáčí, přibližuje či vzdaluje, sklápí a natáčí vůči postavení kamer. Po každém ustavení do požadované polohy se vytvoří snímek, ze kterého systém automaticky identifikuje referenční body na kříži a určí jejich polohu v prostoru. Na Obr. 22 jsou zobrazeny pozice pro kalibrování pomocí kalibračního kříže.



Obr. 22 Pozice kalibračního kříže při kalibraci [23]



Po ukončení kalibrace je vytvořen dokument s výsledky kalibrace. Nejdůležitější hodnotou v těchto výsledcích je kalibrační odchylka, která by neměla překročit hodnotu 0,04 pixelů, aby bylo možno považovat kalibraci za dostačující. Na následujících řádcích je zobrazen výstupní kalibrační protokol pro kalibraci, která byla uskutečněna pro měření frekvenční analýzy prutů s výslednou kalibrační odchylkou 0,031 pixelů, což bylo považováno za dostatečnou přesnost.

General	
Calibration date	Wed Mar 18 14:26:57 2016
Calibration object	
Object type	Cross (coded)
Name	Calibration cross
Calibration scale	Distance 1: 1721.207 mm
	Distance 2: 1717.421 mm
Certification temperature	20.0 °C
Expansion coefficient	-0.85 x 10 <sup>-6</sup> 1/K
Measurement Temperature	20.0 °C
Calibration settings	
Camera lenses	50.00 mm
Results	
Calibration deviation	0.031 pixels
Scale deviation	0.026 mm
Camera angle	13.7°
Angle variance	-9.6 / 10.7°
Height variance	621 mm
Measuring volume	3200 / 2455 / 2455 mm

### 5.1.2 Příprava experimentu

Vybrané pruty byly upnuty k pevné základně, která byla umístěna do vzdálenosti 6,8 metru od kamerového systému Pontos. Na pruty byly nanесeny samolepící kruhové referenční body v kontrastní barvě - vnější černá, vnitřní bílá (průměr bílé části 18 mm), které systém snímá a vyhodnocuje jejich posunutí v závislosti na čase.



Obr. 23 Rozmístění snímaných bodů na prut kruhového průřezu

Body na kruhovém prutu byly umístěny ve vzdálenosti 0; 210; 420; 645 a 875 mm od volného konce prutu. Dalších pět bodů bylo umístěno na pevnou základnu, aby mohly být při analýze použity jako pevné body pro vytvoření souřadného systému.

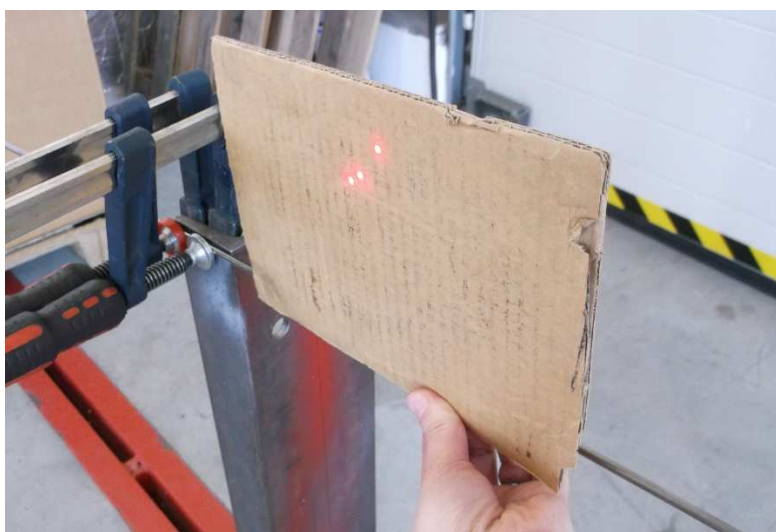


Obr. 24 Rozmístění snímaných bodů na prut obdélníkového průřezu

Při přípravě druhého prutu, obdélníkového průřezu, byly ponechány statické body na základně a na prut bylo aplikováno pět bodů, stejných jako v předchozím případě, do vzdálenosti 0; 210; 420; 650 a 875 mm od volného konce prutu. Prut byl upnut tak, aby se zatěžující síla, působící svisle dolů, aplikovala kolmo na širší část prutu.


Délka vetknutí byla při jednotlivých měřeních proměnná (bude vždy zmíněna u jednotlivých měření), avšak měřicí body zůstávaly na stejných pozicích.

Po nachystání měřených objektů bylo nutné snížit kamery oproti pozici při kalibraci, jelikož výška upnutí prutů byla přibližně 790 mm, což je podstatně níže než původně nastavená výška pro střed kalibračního kříže (výška kamer nijak neovlivňuje kvalitu měření, avšak je nutné, aby se zobrazovaly všechny měřené body na obrazech z obou kamer). Také se zkontrolovala vzdálenost měřeného objektu od kamer tím, že se spustily laserové paprsky, které by se měly ve vzdálenosti umístění měřeného objektu co nejvíce přibližovat.



Obr. 25 Kontrola vzdálenosti pomocí laserových paprsků


### 5.1.3 Realizace experimentu

Deformační analýza se v systému Pontos spouští pomocí ikony Start/ Stop Measurement Mode  (v levém horním rohu vedle ikony kalibrace). V této sekci se nastaví snímkovací frekvence, čas uzávěrky a počet snímků, které systém nasnímá (snímání jde zastavit i v průběhu snímání při menším počtu snímků, než je nastaveno). Také zde lze určit, jestli se mají během snímání spouštět světla zabudovaná v systému, a v případě potřeby se v tomto módu spouští laserové paprsky.

Pro měření frekvenční analýzy bylo vyzkoušeno několik variant nastavení, avšak nejvíce se osvědčilo následující:

- snímkovací frekvence 24 Hz
- čas uzávěrky 1,666 ms
- zabudovaná světla při měření zapnuta
- bez přídavného osvětlení
- clona na kamerách 6,5

Systém Pontos má předdefinované kombinace snímkovací frekvence a času uzávěrky, tzn. při zvyšování snímkovací frekvence se bude čas uzávěrky snižovat a naopak. Při nastavování jiných hodnot (např. snímkovací frekvence 10 Hz a času uzávěrky 60 ms) systém dostatečně nerozpoznal všechny body a výsledky by byly neprůkazné.

Ve chvíli, kdy je systém i měřený objekt připravený pro měření, spustí se měření ikonou , která je vizuálně shodná s ikonou pro spouštění deformační analýzy, avšak je umístěna v levém dolním rohu vedle ikony spouštění laserového paprsku.

Vyvolání kmitání bylo u všech variant prutů provedeno pro jednoduchost zatížením rukou ve směru svislém k zemi, s co největším úsilím zatěžovat pouze v jednom směru, a poté náhlým odlehčením.

Při prvních pěti měřeních nebyla používána kontrola s akcelerometrem, měření bylo prováděno pro ověření systému Pontos, zjištění jeho možností a nastavení postupu vyhodnocování, avšak výsledky budou také dále prezentovány.

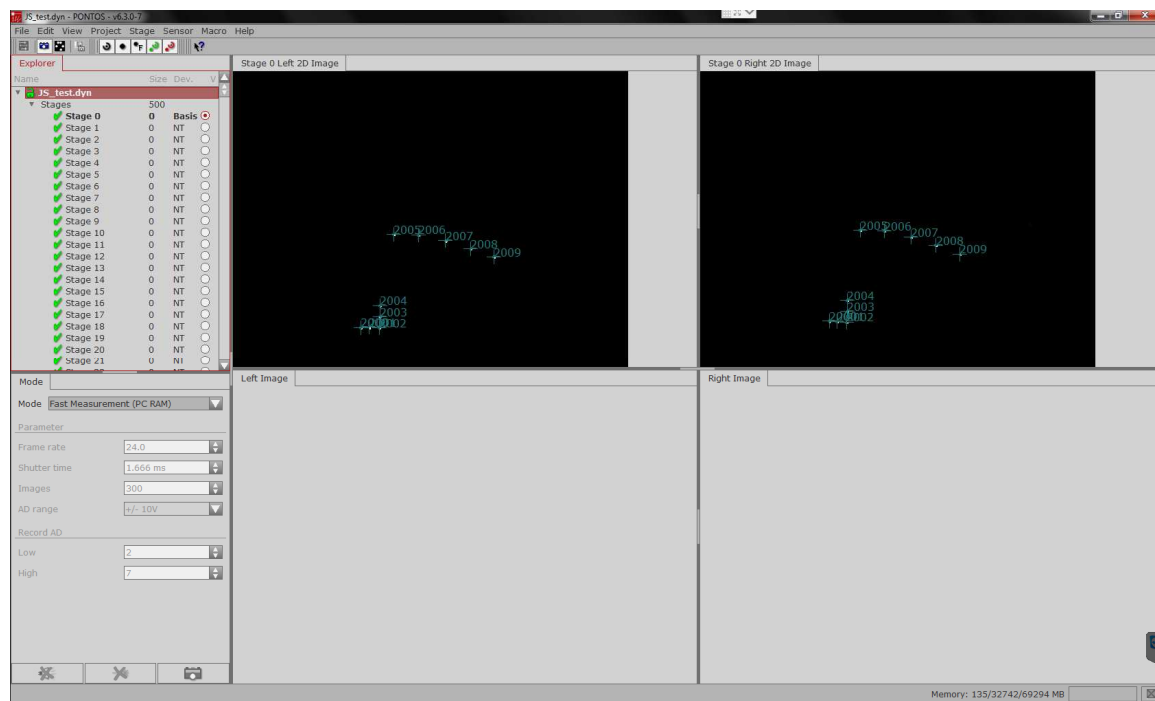


Obr. 26 Upnutí prutu k pevné základně





### 5.1.4 Vyhodnocení experimentu

Při spuštění měření (pomocí tlačítka Trigger) se vytvoří počet snímků, který byl uveden v nastavení (pokud nebylo snímání zastaveno dříve tlačítkem Stop) s požadovanou frekvencí a časem uzávěrky. Snímky se zobrazí v levé části s označením Stage 0 až Stage x (kde x je počet vytvořených zobrazení).



Obr. 27 Mód snímání

Pro analýzu je nutné se vrátit zpět do základního módu pomocí ikony  v levém horním rohu. Abychom mohli získat data pro pohyb jednotlivých bodů, je nutné, aby je systém správně identifikoval na každém snímku – každému bodu přiřadí identifikační číslo, které se musí na všech snímcích shodovat. Před identifikací je nutné nastavit maximální chybu průniku (Max intersection error), která určuje maximální rozdíl polohy jednoho bodu mezi snímkem z pravé a levé kamery. Tato odchylka lze nastavit na každém snímku jiná, ale pro přesnost je doporučováno nastavit tuto hodnotu co nejnižší a jednotnou pro všechny snímky. Nastavení hodnoty se provádí kliknutím pravým tlačítkem myši na název snímku (např. Stage 0) > Stage Parametre. Pro nastavení stejné hodnoty na všech snímcích stačí označit všechny snímky (kliknutí na první snímek > Ctrl+A) > Stage Parametre. Při měření prutů byla tato hodnota nastavena na 0,4 a pro křídlo, jelikož body jsou více statické 0,2. Po nastavení odchylky se provede identifikace bodů. Identifikaci spustíme pomocí ikony Compute Stages  a zvolíme variantu Compute All Stages.

Tímto se identifikují jednotlivé body na snímcích a poté je možné získat data o jejich posunutí, avšak je vhodné si předtím zkontrolovat, zda jsou body identifikovány na všech snímcích a mají správné označení. V případě, že některé body nesou jiné identifikační číslo než v předchozím snímku, je možné toto číslo ručně přepsat pomocí záložky Displacement > pravým tlačítkem myši na označení bodu, které je nutné přepsat > Set ID for Object Point.

K vyhodnocení posunutí jednotlivých bodů je zapotřebí definovat základní souřadnicovou soustavu, ke které se bude posunutí vztahovat. Systém umí nadefinovat souřadnou soustavu vlastní, avšak je možné ji vytvořit ze snímaných bodů. Tomuto účelu sloužily referenční značky umístěné na pevné základně. Vytvoření souřadné soustavy se provádí definicí nulového bodu, jedné osy a referenční roviny.

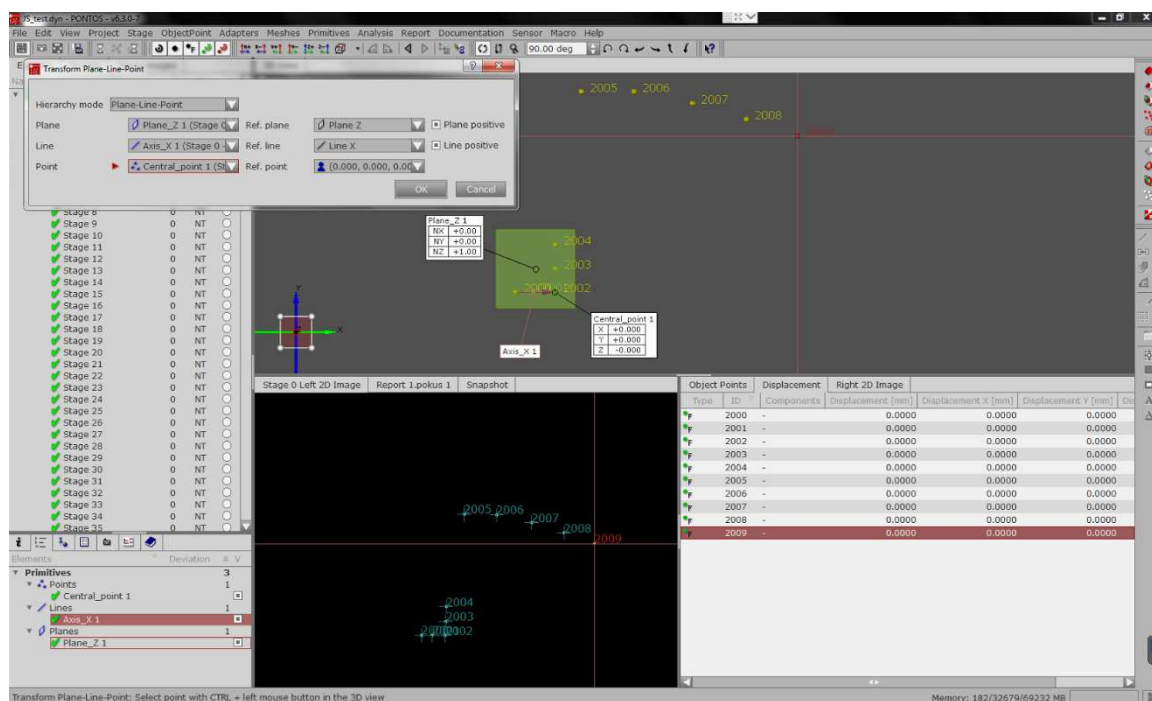
Postup pro definici nulového bodu: Primitives > Point > Point – výběr bodu se provádí držením klávesy Ctrl + klikem levého tlačítka myši na příslušný bod.

Postup pro definici osy: Primitives > Line > Point – Point Line – výběr dvou bodů, ze kterých se vytvoří osa.

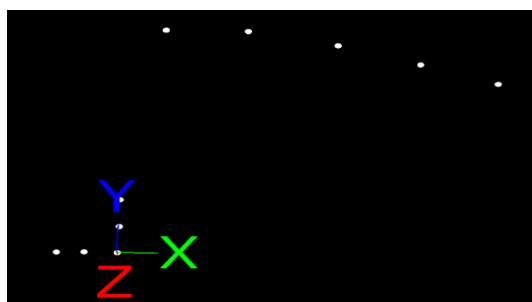
Postup pro definici roviny: Primitives > Plane > Point – Point – Point Plane.

Vytvoření souřadného systému: Project > Transform Project > Transform Plane – Line – Point.

Výše uvedené postupy jsou pouze jedny z mnoha variant, které lze použít. Tyto jsou zde uvedeny, jelikož byly použity při vytváření souřadného systému pro analýzu kmitání prutů i křídla. Souřadný systém byl volen shodně pro všechny analýzy prutů.



Obr. 28 Vytvoření vlastního souřadného systému



Obr. 29 Souřadný systém pro všechny analýzy prutů

Program Pontos sám o sobě neumí provádět frekvenční analýzu, používá se především pro vyhodnocování deformací (posunutí). Lze tedy získat závislost výchylky na čase, ale již ne vlastní frekvenci kmitání. Kvůli tomu je nutné využít jiný program, který z hodnot posunutí dokáže zjistit i hodnoty vlastní frekvence. Pro analýzu byl použit program Matlab R2015a.

Aby bylo možné analyzovat výsledky ze systému Pontos, je zapotřebí exportovat hodnoty posunutí pro jednotlivé body File > Export > Tables > Next > Next > ASC II ID-X-Y-Z. Program na základě těchto příkazů vytvoří textový soubor, do kterého запиše čtyři sloupce (identifikační číslo bodu; souřadnice X; souřadnice Y; souřadnice Z). Hodnoty polohy jsou uváděny v milimetrech. Počet řádků v textovém programu = počet měřených bodů x počet snímků). Příklad části vzhledu textového souboru:

2000	-149.1051	0.0000	0.0000
2001	-81.8023	1.5359	-0.1680
2002	0.0000	0.0000	0.0000
2003	2.5659	181.9418	0.0000
2004	2.9115	89.6555	0.0875
2005	141.4217	730.6502	4.2055
2006	368.0669	717.4276	2.4580
2007	594.6967	699.7765	0.2239
2008	804.3641	683.1010	-3.0165
2009	1008.5608	662.1383	-5.5781
2000	-149.1109	0.0020	-0.0001
2001	-81.7966	1.5439	-0.1625
2002	0.0062	0.0095	0.0361
2003	2.5631	181.9450	0.0208
2004	2.9102	89.6579	0.1029
2005	141.4397	731.0100	4.1644
2006	368.1885	719.5329	2.4271
2007	595.0136	704.6042	0.1559
2008	804.8680	690.7739	-3.1842
2009	1009.3369	672.7787	-5.8955

Tímto výstupem byla ukončena práce v programu Pontos a další postupy byly aplikovány v programu Matlab.

Pro přehlednost a jednodušší analýzu byl v programu Matlab napsán program *ftransformPONTOS.m* (uveden v příloze), který po zadání názvu textového souboru, obsahující všechny body a jejich polohu v prostoru, rozdělil data do jednotlivých textových souborů obsahujících pouze informace o jednom bodu a jeho poloze. Soubor uloží pod názvem bodu, např. point\_2005.txt. Ukázka části jednoho textového souboru po použití programu *ftransformPONTOS.m*:

```
2005,141.4217,730.6502,4.2055
2005,141.4397,731.01,4.1644
2005,141.4575,731.9327,4.6058
2005,141.4585,732.3392,4.9026
2005,141.4457,731.7739,4.7844
2005,141.4331,730.8935,4.4113
2005,141.4349,730.7201,4.1347
2005,141.4605,731.4461,4.3197
2005,141.4634,732.2417,4.7655
```

Na začátku souboru se vytvoří textový řádek neobsahující údaje o bodu, ale pouze slovní popis, ten je nutné před dalšími úkony smazat.

Program, který vypočítává vlastní frekvenci, počítá s tím, že body kmitají okolo nulové hodnoty. Jelikož hodnoty posunutí, které byly získány z programu Pontos, jsou vztaženy k vytvořenému souřadnému systému, je nutné tyto hodnoty upravit tak, aby kmitaly okolo nuly. Např. jak je uvedeno na předchozí stránce, ukázkový bod 2005 kmitá v ose Y přibližně okolo hodnoty 731mm. Pro tuto úpravu byla zvolena metoda zjištění střední hodnoty z hodnot poloh bodu v ose Y, případně osy Z (lze využít opět Matlab, Microsoft Excel nebo jiný vhodný program). Poté co byla zjištěna střední hodnota, byl použit program *posunuti.m* (uveden v příloze). Do tohoto programu se uvádí název textového souboru s hodnotami, dále který sloupec se bude upravovat a jako poslední věc hodnota o kterou se posunou všechny hodnoty v daném sloupci. Tento program výstup opět uloží do samostatného textového souboru, který má již v sobě upravené hodnoty v daném sloupci pod názvem např. *pos2005.txt*.

Pro ukázkou se bude pokračovat v úpravě výše uvedených dat. Střední hodnota polohy bodu 2005 pro všechny hodnoty v ose Y je 731,5 mm. V programu *posunuti.m* byl nastaven název souboru obsahující data, sloupec pro úpravu 3 a hodnota posunutí -731.5. Příklad příkazu pro vyvolání funkce:

```
[] = posunuti('point_2005.txt',3,-731.5)
```

Ukázka části textového souboru vytvořeného programem *posunuti.m*:

```
2005,141.4217,-0.849799999999959,4.2055
2005,141.4397,-0.490000000000009,4.1644
2005,141.4575,0.432699999999954,4.6058
2005,141.4585,0.839200000000005,4.9026
2005,141.4457,0.273900000000026,4.7844
2005,141.4331,-0.606499999999983,4.4113
2005,141.4349,-0.779899999999998,4.1347
2005,141.4605,-0.0538999999999987,4.3197
2005,141.4634,0.741700000000037,4.7655
```

Opět se po vytvoření souboru objeví na začátku textový řádek bez číselných hodnot, který je před dalším postupem nutné smazat. Nyní je možné přejít k samotné frekvenční analýze. K této analýze byly použity dva programy vytvořené taktéž v programu Matlab. Samotnou analýzu provádí program *furiert.m* (uveden v příloze), ale data do tohoto programu posílá program *Tofourier.m* (uveden v příloze). Je to z toho důvodu, že do programu *furiert.m* [24] vstupuje pouze čas a hodnota posunutí, kdežto v textovém souboru s připravenými daty není uveden čas pro jednotlivé posunutí a navíc jsou zde další nepotřebné informace.

Z výše uvedeného vyplývá, že stačí zadat informace do programu *Tofourier.m*, který již dále pošle informace do programu *furiert.m* a tím v něm spustí analýzu. Do funkce *Tofourier.m* se musí zadat název souboru, časový úsek mezi jednotlivými snímky v sekundách a sloupec, který chceme použít k analýze. Příklad příkazu pro vyvolání funkce: `[furiert] = Tofourier('pos2005.txt', 0.00166, 'y')`

Následně proběhne Fourierova transformace v programu *furiert.m* a výstupem jsou hodnoty a graf vlastní frekvence kmitání a graf závislosti výchylky na čase.

### **Shrnutí postupu pro získání hodnoty vlastní frekvence kmitání:**

- 1) kalibrace systému Pontos
- 2) měření systémem Pontos
- 3) identifikace a analýza bodů v programu Pontos, vytvoření souřadného systému
- 4) export posunutí jednotlivých bodů do textového souboru
- 5) rozdělení textového souboru na jednotlivé body pomocí funkce *ftransformPONTOS.m* v *Matlabu*
- 6) zjištění střední hodnoty, kolem které kmitají jednotlivé body v ose Y, případně Z
- 7) změna hodnot posunutí bodů v jednotlivých osách pomocí funkce *posunuti.m*
- 8) použití programu *Tofourier.m* pro zadání hodnot do programu *furiert.m*
- 9) zjištění hodnoty vlastní frekvence kmitání

Pro výpočty byly vyřazeny body na pevné základně, které sloužily pouze pro vytvoření souřadného systému a jelikož byly statické, nemá žádný význam pro ně aplikovat výše uvedené postupy.

K ověřování výsledků byl použit také teoretický výpočet vlastních frekvencí vetknutých prutů. Pro tento účel byly taktéž využívány programy vytvořené v *Matlabu*. Program *vetnos.m* [25] (uveden v příloze) vypočítává na základě vstupních parametrů a frekvenční rovnice vlastní frekvence, polohu uzlových bodů a zobrazí vlastní tvary kmitů. Tento program se spouští programem *start.m* [25] (uveden v příloze), do kterého se zadávají vstupní parametry:

- šířka příčného průřezu  $b$  v mm
- výška příčného průřezu  $h$  v mm
- délka prutu v mm
- hustota materiálu nosníku v  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- modul pružnosti v Pa
- proměnnou tvar, která může mít hodnotu 1, 2, 3, 4 nebo „vse“ a určuje, zda se vykreslí jen první, druhý, třetí nebo čtvrtý tvar vlastních kmitů nebo všechny do jednoho grafu
- proměnnou průřez, která může mít hodnotu „obdelnik“ nebo „kruh“, podle toho jaký tvar má příčný průřez nosníku (v případě že se jedná o kruhový průřez, zadá se hodnota  $b$  jako průměr a hodnota  $h$  může být libovolné číslo) [25]

Vysvětlení postupů používaných v programech *vetnos.m* a *start.m* jsou detailně popsány v bakalářské práci Bc. Jana Podušky nazvané Experimentální analýza dynamického chování vetknutého nosníku a také v komentáři programů uvedených v příloze této práce.

### 5.1.5 Vyhodnocení měření bez kontroly s akcelerometrem

V této kapitole bude následovat postupné vyhodnocování jednotlivých měření kmitání prutů. Vyhodnocení bude vytvořeno pro kmitání v ose Y, jelikož porovnání s teoretickým výpočtem a měřením akcelerometrem je dostupné pouze pro tuto osu. U kruhového průřezu je předpoklad, že prut bude kmitat krouživým pohybem, zatímco u obdélníkového průřezu toto chování nebude tolik výrazné. Pro všechny měření platí kalibrace uvedená v kapitole 5.1.1 a také hodnoty nastavení uvedené v kapitole 5.1.3:

- snímkovací frekvence 24 Hz
- čas uzávěrky 1,666 ms
- zabudovaná světla při měření zapnuta
- bez přídavného osvětlení
- clona na kamerách 6,5

#### 1) Kmitání vetknutého nosníku kruhového průřezu, délka 1010 mm

- kruhový průřez o průměru: 5mm
- materiál: ocel
- hustota materiálu: 7850 kg/m<sup>3</sup>
- modul pružnosti v tahu: 210 000 MPa
- délka vetknutí: 1010mm
- počet měřených bodů: 5
- umístění bodů od volného konce prutu: 0mm (bod 2009)  
210mm (bod 2008)  
420mm (bod 2007)  
645mm (bod 2006)  
875 mm (bod 2005)
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 6,8 m
- počet měření: 3
- datum měření: 18. 3. 2016
- označení v souborech: kruh1, kruh 2, kruh 3
- zatížení: lehký úder prsty ve směru osy Y do volného konce prutu

#### Teoretická data získaná programem *vetnos.m* a *start.m*:

První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou **3,5466 Hz, 22,2262 Hz, 62,234 Hz, 121,9538 Hz.**

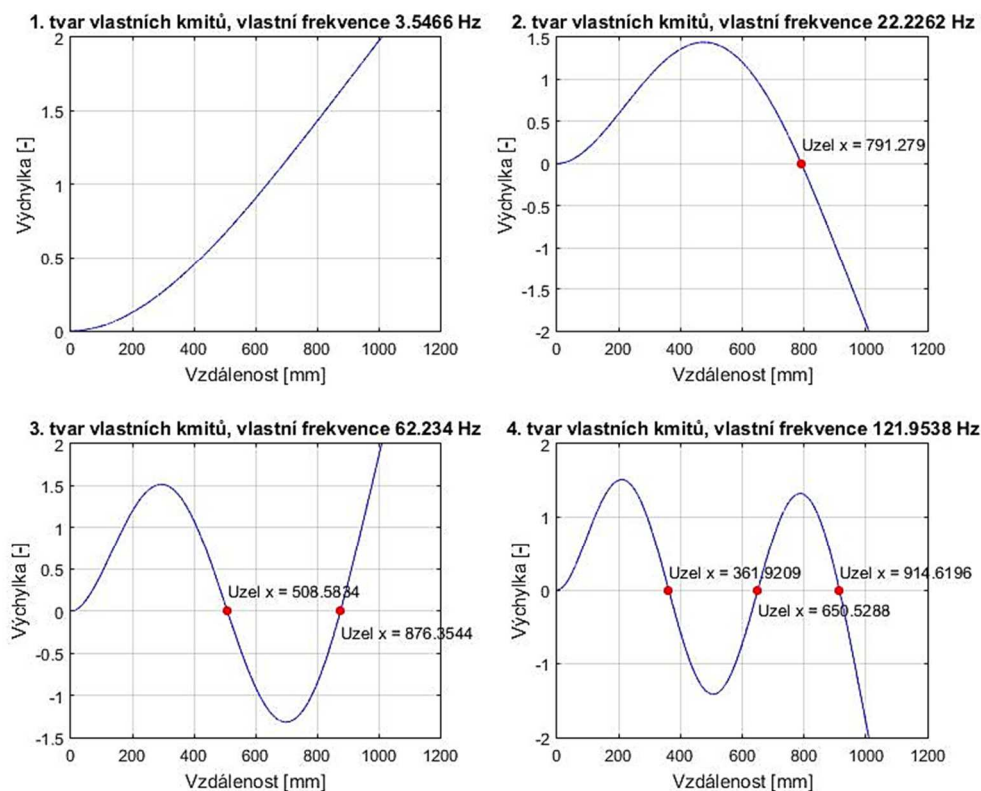
Uzlové body pro první čtyři tvary kmitání (vzdálenostech od vetknutého konce v mm):

1. tvar 0

2. tvar 0      791.279

3. tvar 0      508.5834      876.3544

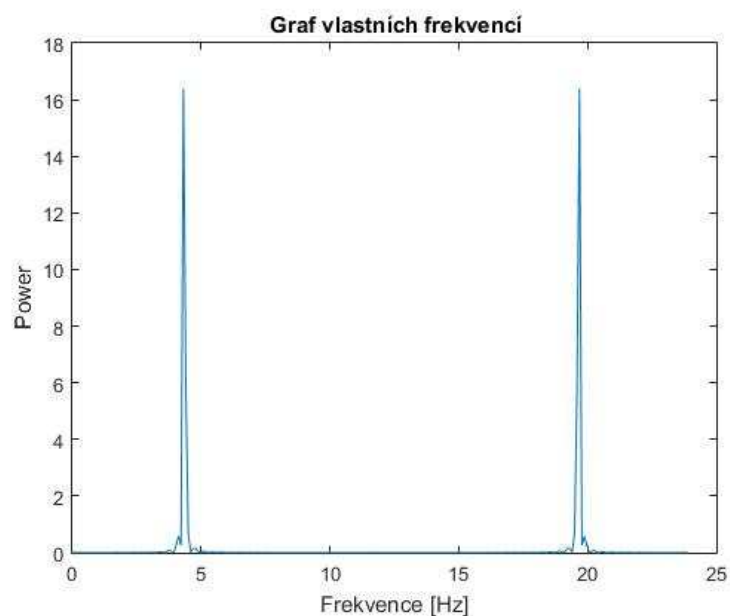
4. tvar 0      361.9209      650.5288      914.6196



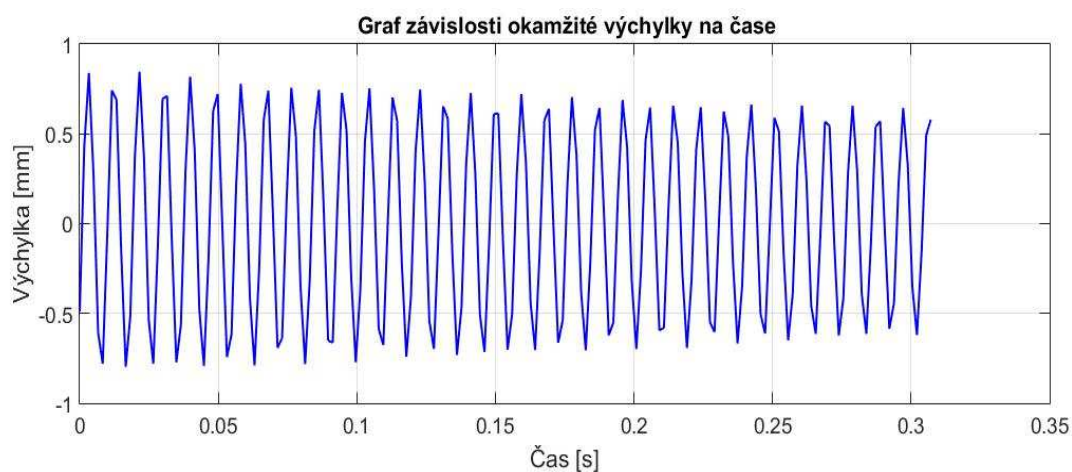
Obr. 30 Teoretické hodnoty vlastních frekvencí pro prut kruhového průřezu o délce 1010 mm a tvary vlastních kmitů

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro první měření – kruh 1:

vyhodnocení pro bod 2005: vlastní frekvence **4,3125 Hz a 19,6875 Hz**

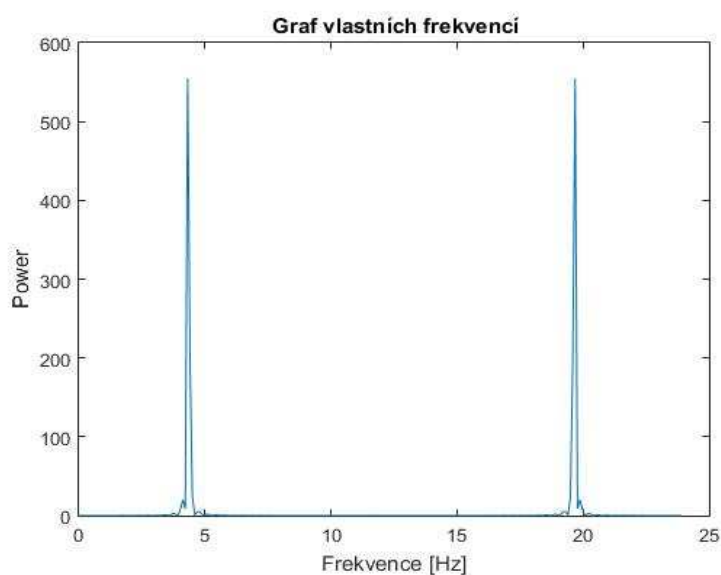


Obr. 31 Vlastní frekvence, kruh 1, bod 2005

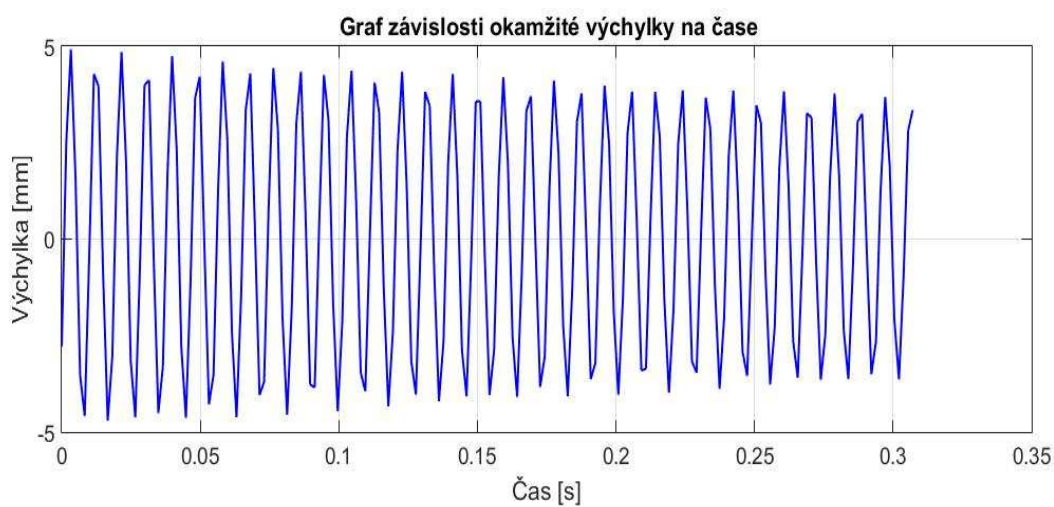


Obr. 32 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2005

vyhodnocení pro bod 2006: vlastní frekvence **4,3125 Hz a 19,6875 Hz**



Obr. 33 Vlastní frekvence, kruh 1, bod 2006



Obr. 34 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2006



vyhodnocení pro bod 2007, 2008 i 2009 je shodné s předchozími: vlastní frekvence **4,3125 Hz a 19,6875 Hz**



Obr. 35 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2007



Obr. 36 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2008

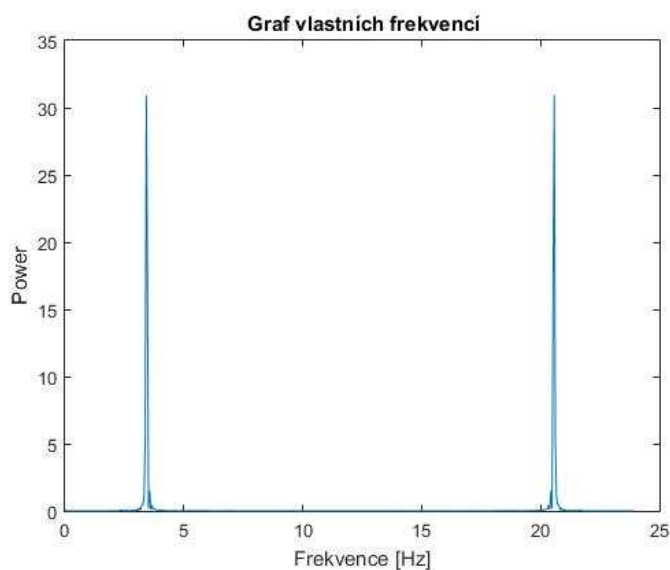


Obr. 37 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2009

Z výše uvedených výsledků je patrné, že ať je zvolen k analýze kterýkoliv měřený bod na prutu, je výsledná vlastní frekvence kmitání shodná. Proto bude v následujících výsledcích zobrazen vždy výsledek pro jeden bod z prutu, který bude reprezentovat kompletní výsledek daného měření.

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro druhé měření – kruh 2:

vlastní frekvence: **3,4219 Hz a 20,5781 Hz**



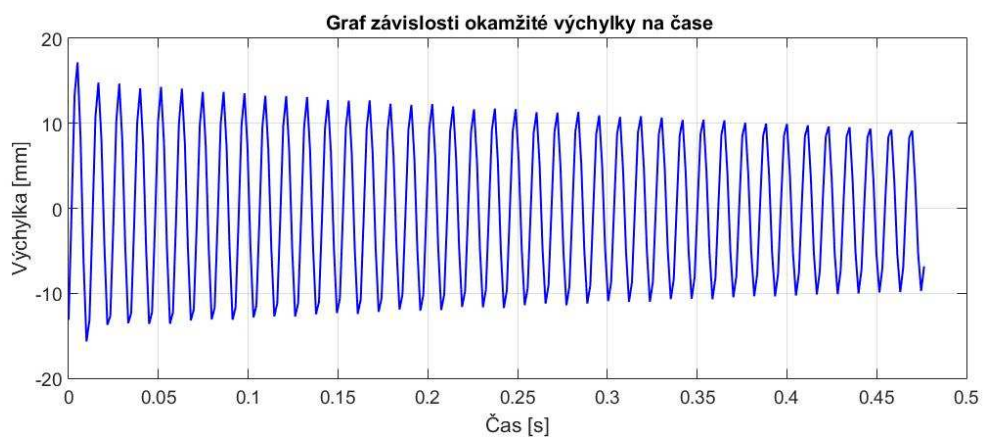
Obr. 38 Vlastní frekvence, kruh 2, body 2005 až 2009



Obr. 39 Graf výchylka / čas, kruh 2, bod 2005



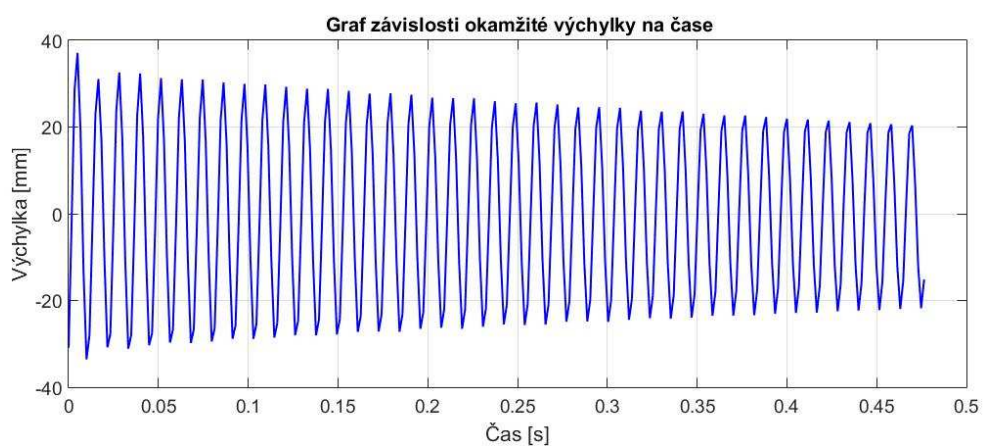
Obr. 40 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2006



Obr. 41 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2007



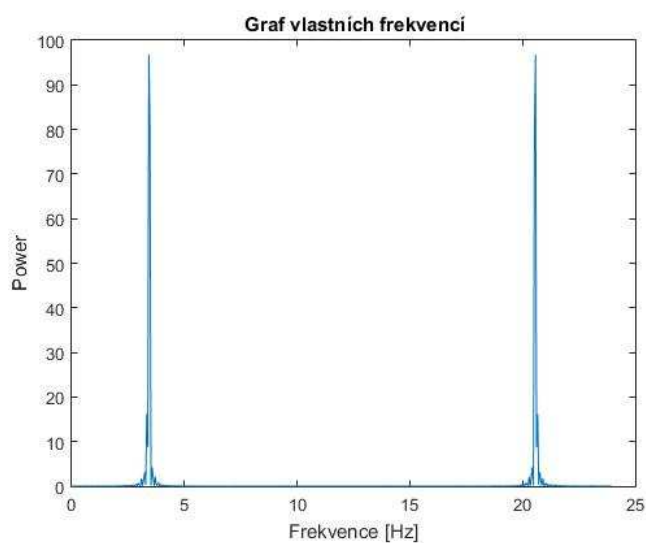
Obr. 42 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2008



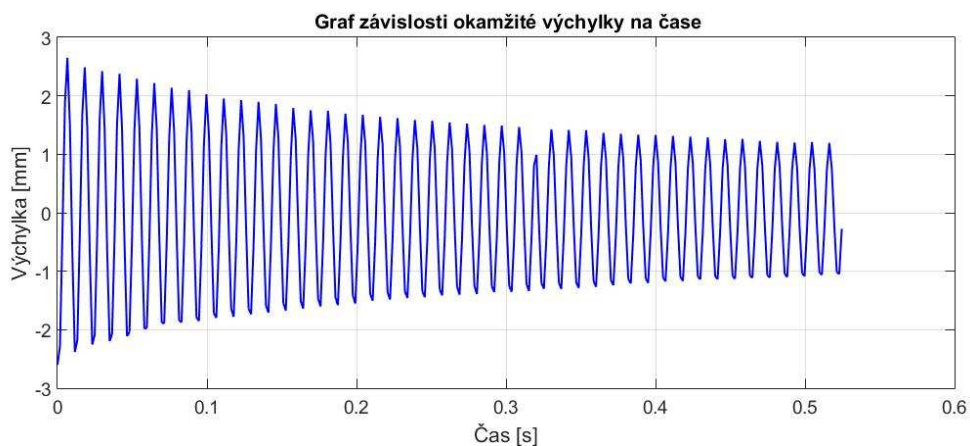
Obr. 43 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2009

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro třetí měření měření – kruh 3:

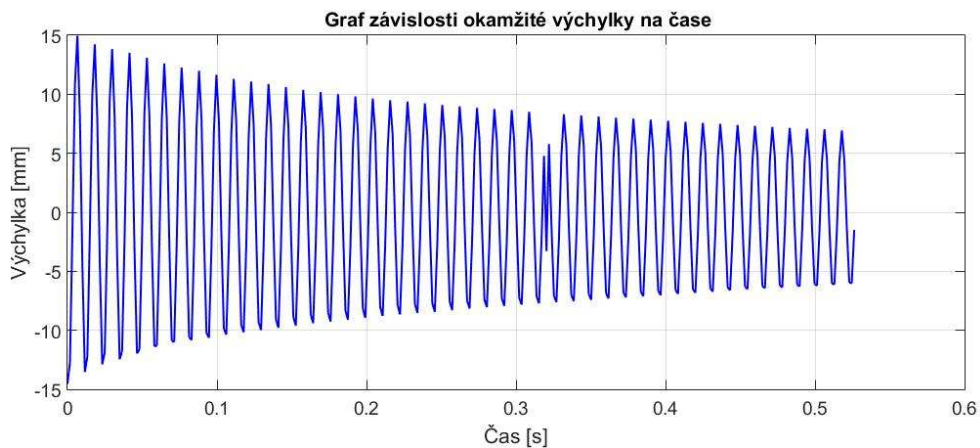
vlastní frekvence: **3,4219 Hz a 20,5781 Hz**



Obr. 44 Vlastní frekvence, kruh 3, body 2005 až 2009

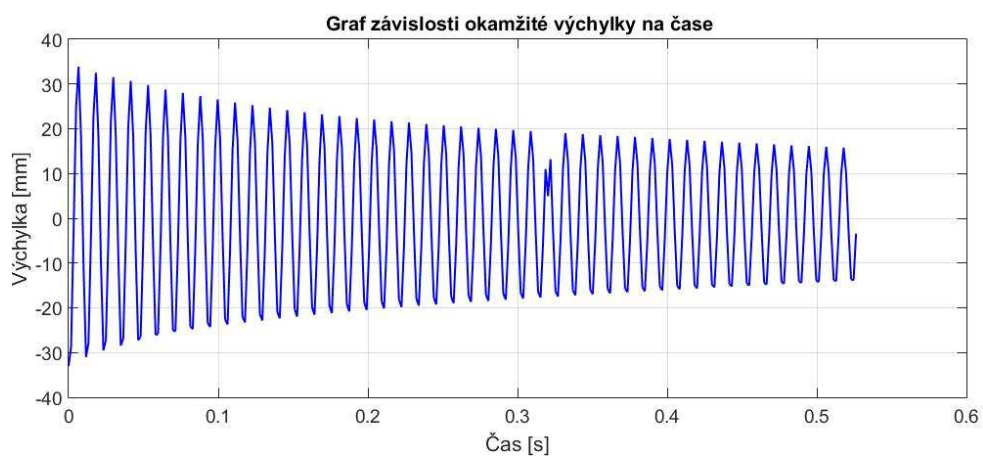


Obr. 45 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2005

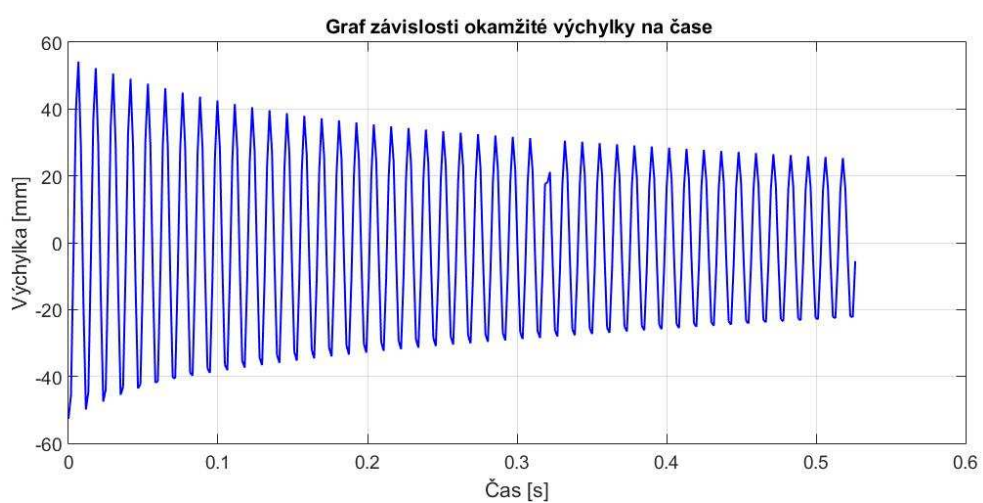


Obr. 46 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2006

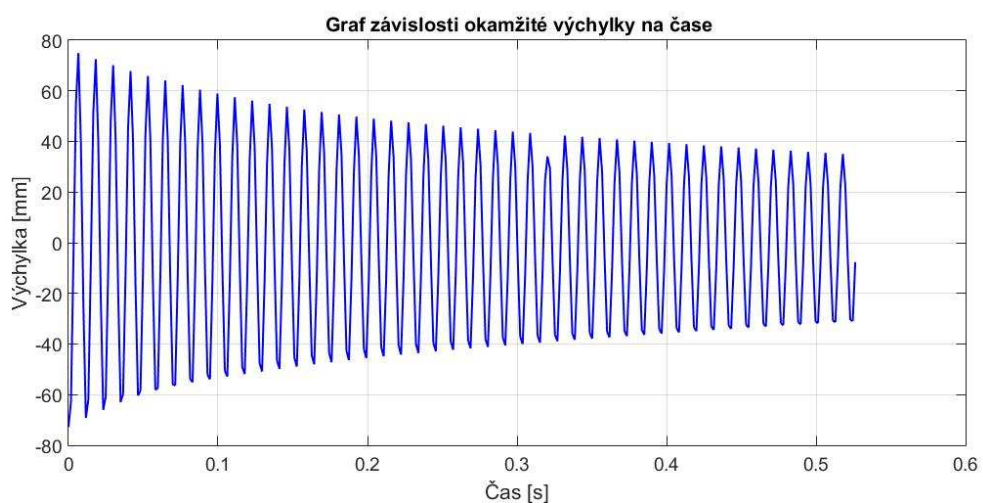




Obr. 47 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2007



Obr. 48 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2008

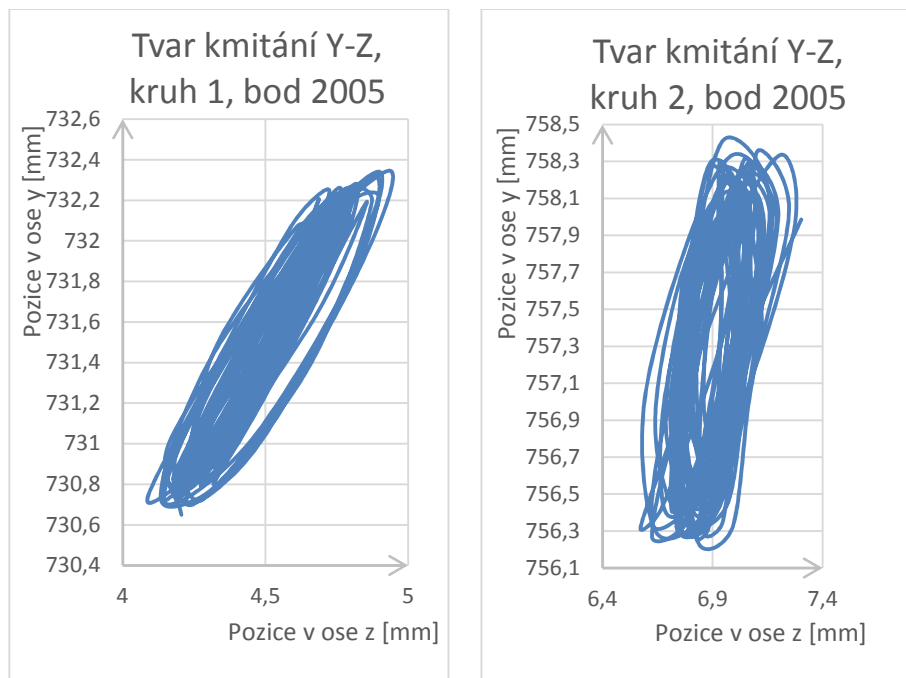


Obr. 49 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2009

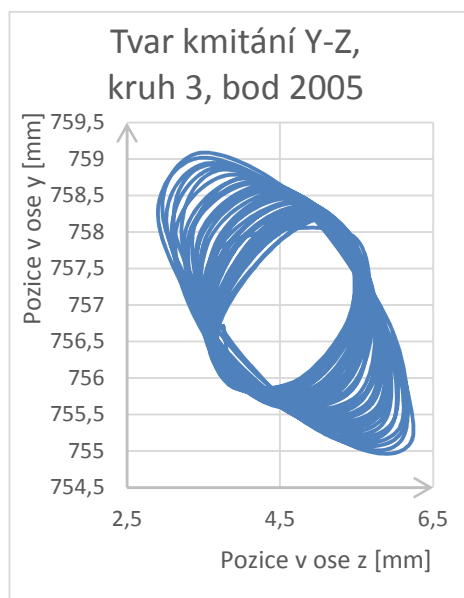
Shrnutí výsledků prvních dvou vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od teoretické hodnoty:

Tabulka 1 Shrnutí výsledků kruh 1 až kruh 3

Teoretická hodnota	Pontos					
	kruh 1	[%]	kruh 2	[%]	kruh 3	[%]
3,5646	4,3125	20,98132	3,4219	-4,00325	3,4219	-4,00325
22,2262	19,6875	-11,4221	20,5781	-7,41512	20,5781	-7,41512



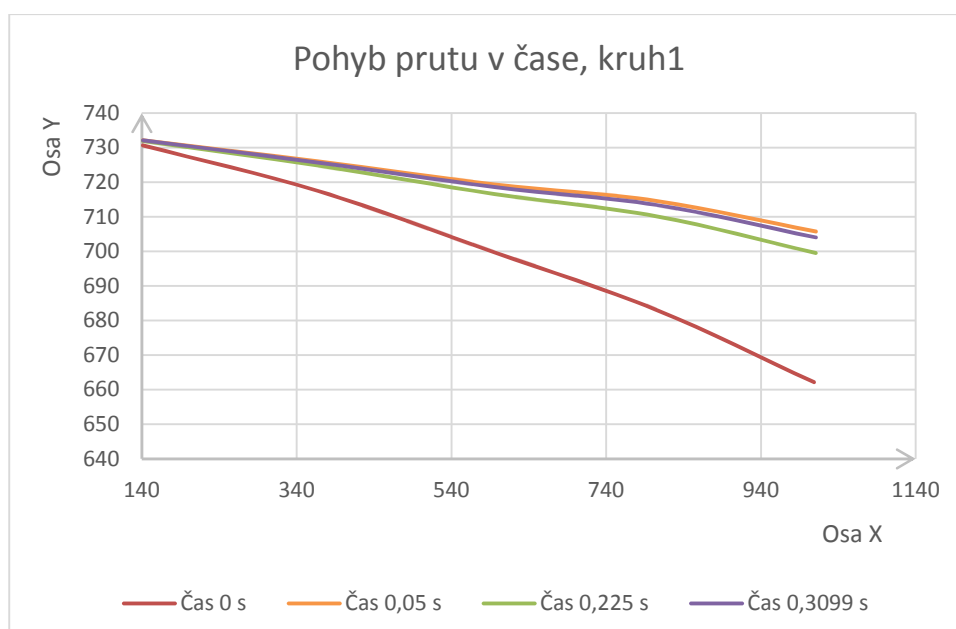
Obr. 50 Tvar kmitání v ose Y-Z, kruh 1 (vlevo) kruh 2 (vpravo), bod 2005



Obr. 51 Tvar kmitání v ose Y-Z, kruh 3, bod 2005

Zobrazení tvaru kmitání v ose Y-Z bylo pro lepší názornost vytvořeno pro bod 2005, který je umístěn nejbližše vetknutí. Z výsledků je patrné, že při prvním pokusu (kruh 1) bylo vetknutí poměrně pevné (bod se zde hýbal v ose Z v rozpětí jednoho milimetru), ale síla vyvolávající kmitání nebyla dostatečně svisle orientována a vyvolávala elipsovité kmitání s příčným pohybem. U druhého pokusu (kruh 2) byla zatěžující síla lépe orientována a prut konal přímější kmitavý pohyb ve směru osy Y. Při pokusu třetím (kruh 3) konal prut eliptický pohyb, postupně se měnící v kruhový, avšak již s velkými výchylkami, což ukazuje, že se prut více uvolnil a vetknutí nebylo tak pevné, jako v předchozích případech nebo zatěžující síla byla větší než v předchozích případech. Nicméně pro zjištění vlastní frekvence není velikost prvotního impulzu důležitá.

Při porovnání zjištěných výsledků vlastní frekvence je patrné, že výsledky pro druhý a třetí pokus se shodují s odchylkou od teoretické hodnoty -4% a -7,4%, zatímco u pokusu jedna jsou odchylky 20,98% a -11,42%.



Obr. 52 Ukázka kmitání prutu s časem při měření: kruh 1

## 2) Kmitání vetknutého nosníku obdélníkového průřezu, délka 930 mm

- obdélníkový průřez: 1,4x7,4mm
- materiál: ocel
- hustota materiálu: 7850 kg/m<sup>3</sup>
- modul pružnosti v tahu: 210 000 MPa
- délka vetknutí: 930 mm
- počet měřených bodů: 5
- umístění bodů od volného konce prutu: 0mm (bod 2009)  
210mm (bod 2008)  
420mm (bod 2007)  
650mm (bod 2006)  
875 mm (bod 2005)
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 6,8 m
- počet měření: 2
- datum měření: 18. 3. 2016
- označení v souborech: obd 4, obd 5
- zatížení: lehký úder prsty ve směru osy Y do volného konce prutu

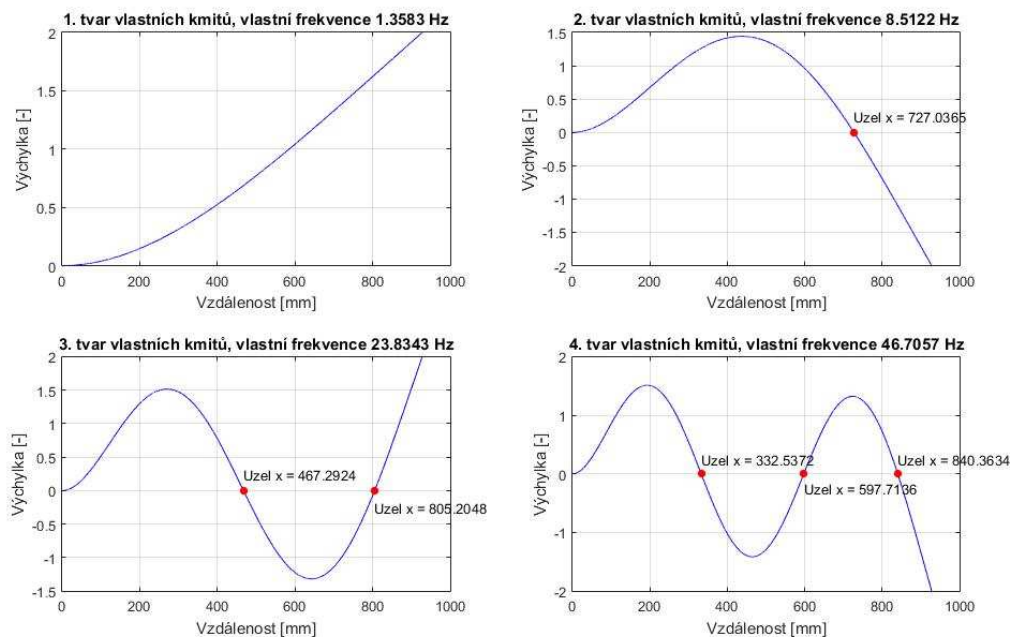
### Teoretická data získaná programem *vetnos.m* a *start.m*:

První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou **1,3583 Hz, 8,5122 Hz, 23,8343 Hz, 46,7057 Hz.**

Uzlové body pro první čtyři tvary kmitání (vzdálenostech od vetknutého konce v mm):

- |           |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|
| 1. tvar 0 |          |          |          |
| 2. tvar 0 | 727.0365 |          |          |
| 3. tvar 0 | 467.2924 | 805.2048 |          |
| 4. tvar 0 | 332.5372 | 597.7136 | 840.3634 |

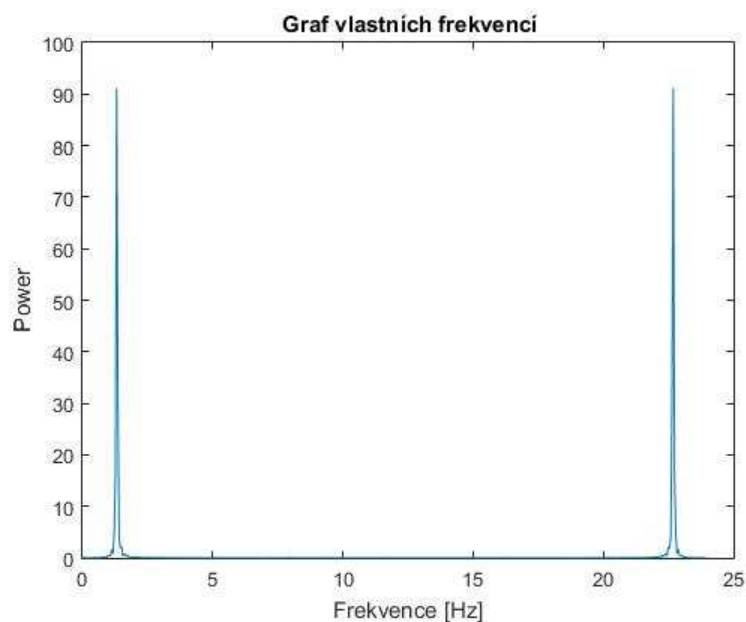




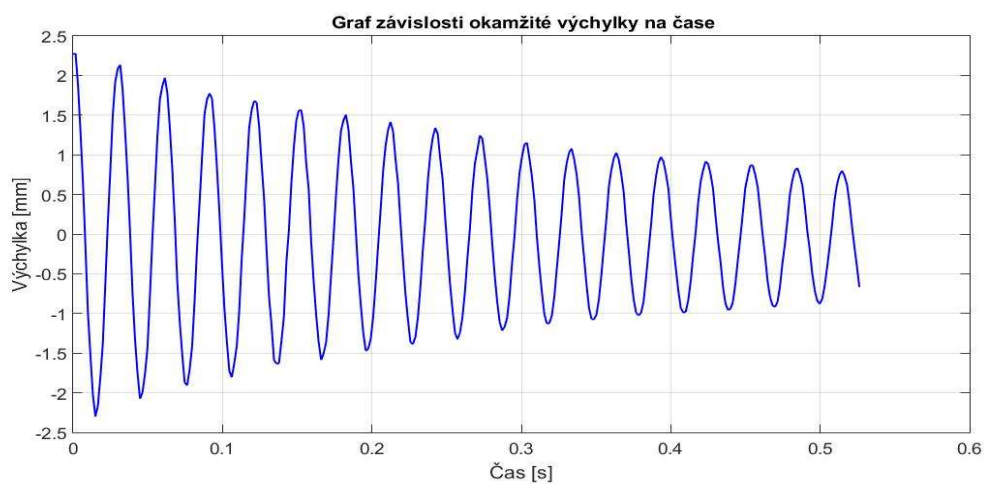
Obr. 53 Teoretické hodnoty vlastních frekvencí pro prut obdélníkového průřezu o délce 930 mm a tvary vlastních kmitů

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – obd 4:

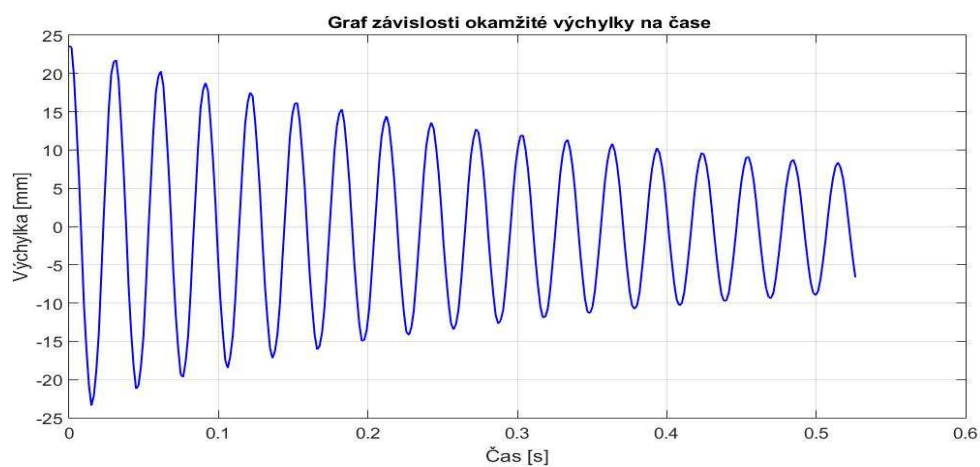
vyhodnocení pro bod 2005: vlastní frekvence **1,3125 Hz a 22,6875 Hz**



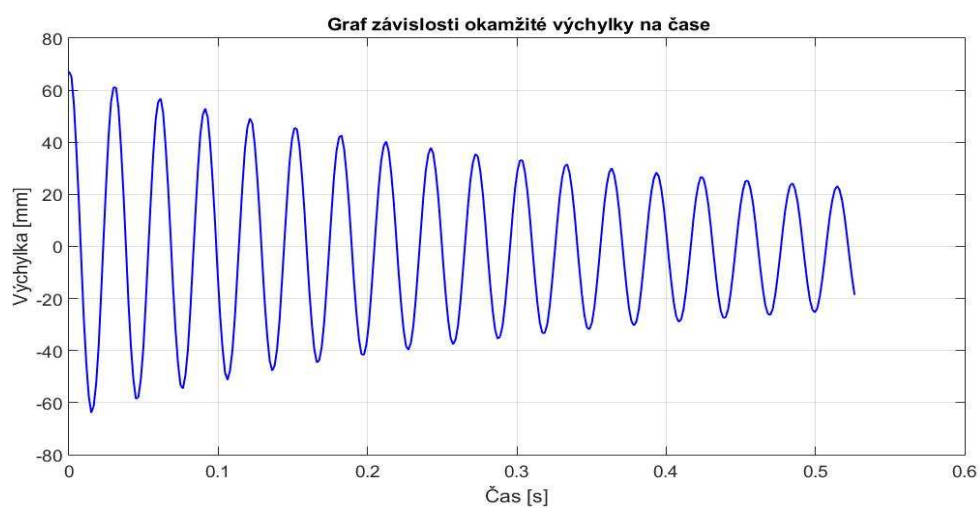
Obr. 54 Vlastní frekvence, obd 4, bod 2005



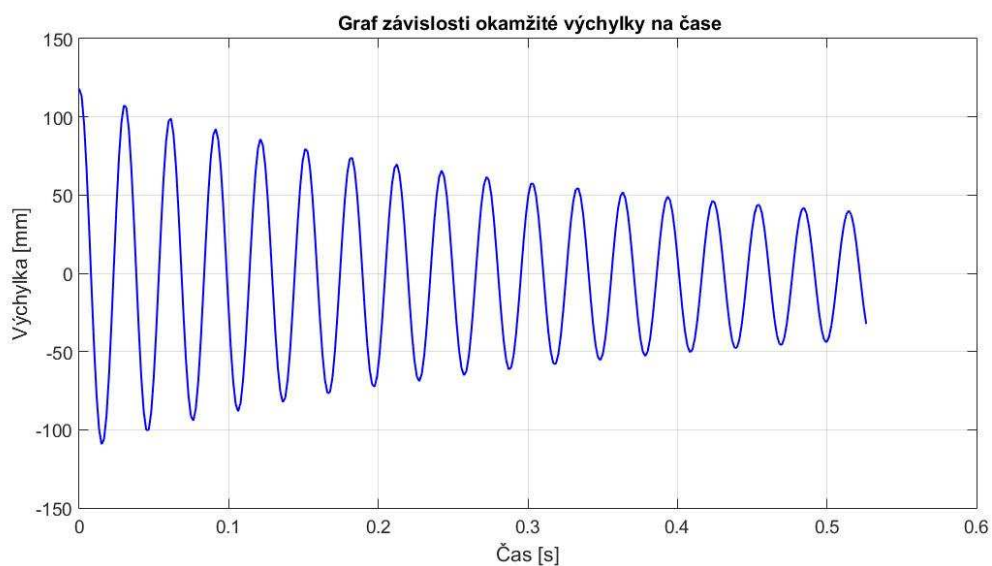
Obr. 55 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2005



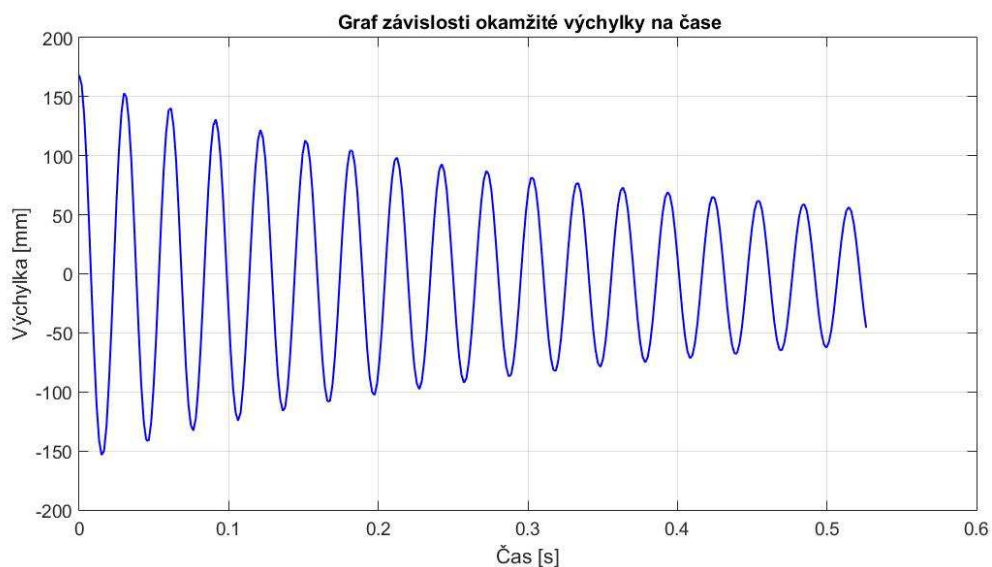
Obr. 56 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2006



Obr. 57 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2007



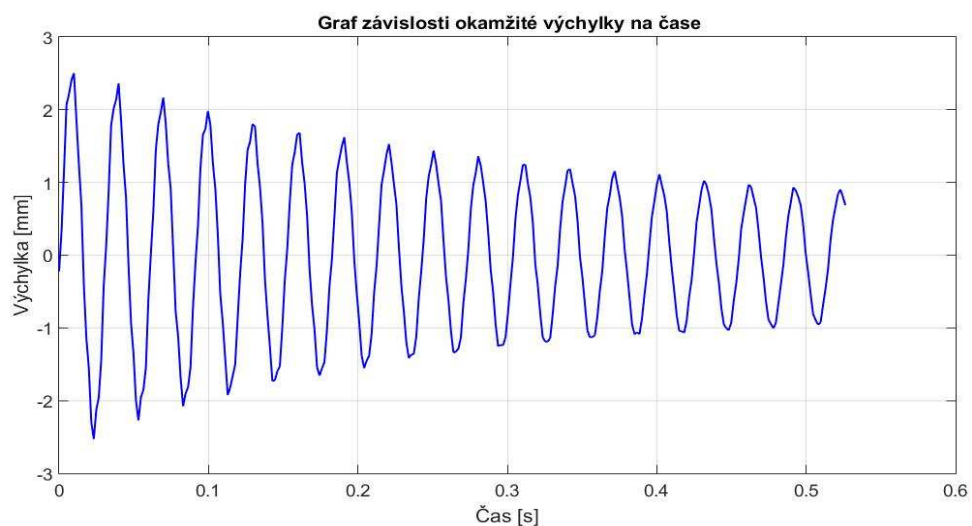
Obr. 58 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2008



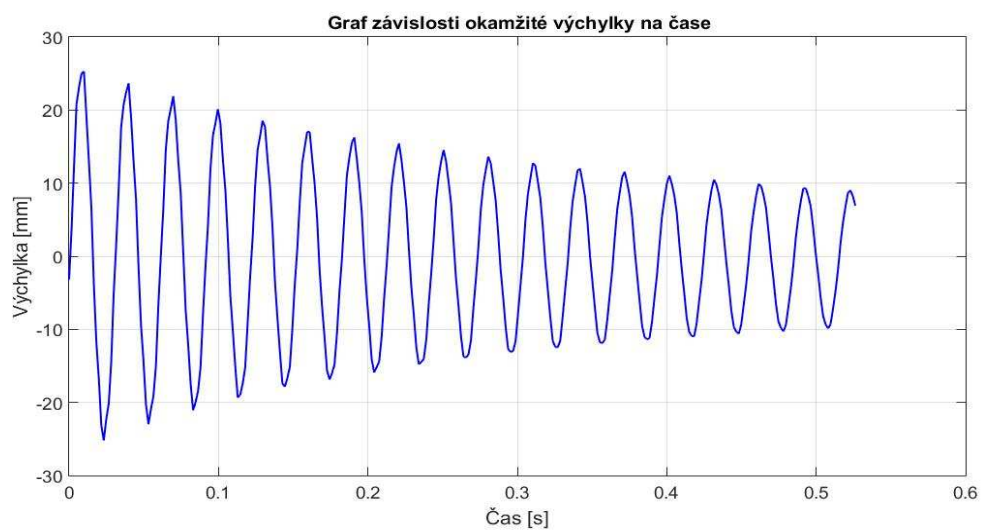
Obr. 59 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2009

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – obd 5:

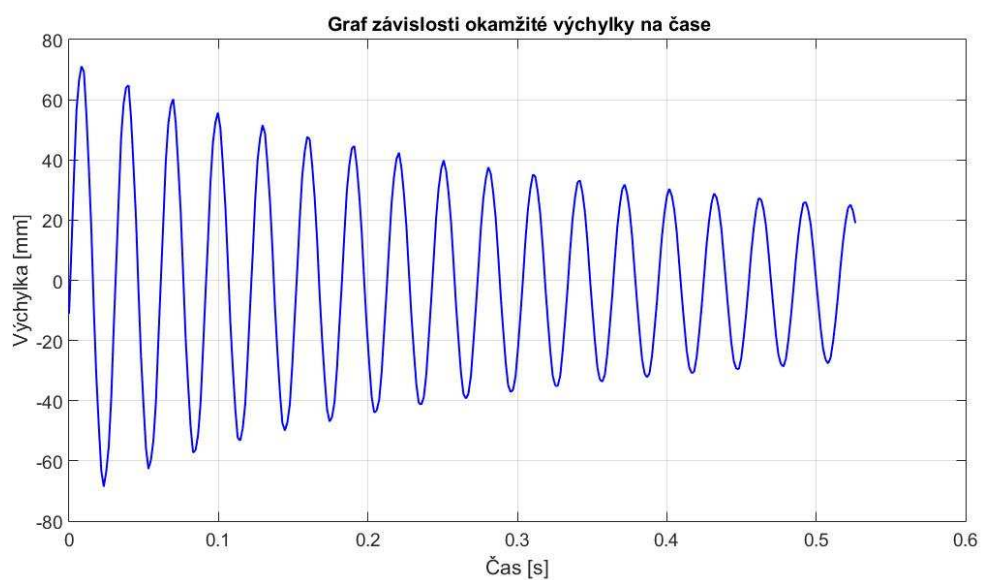
vyhodnocení pro bod 2005: vlastní frekvence **1,3125 Hz a 22,6875 Hz**



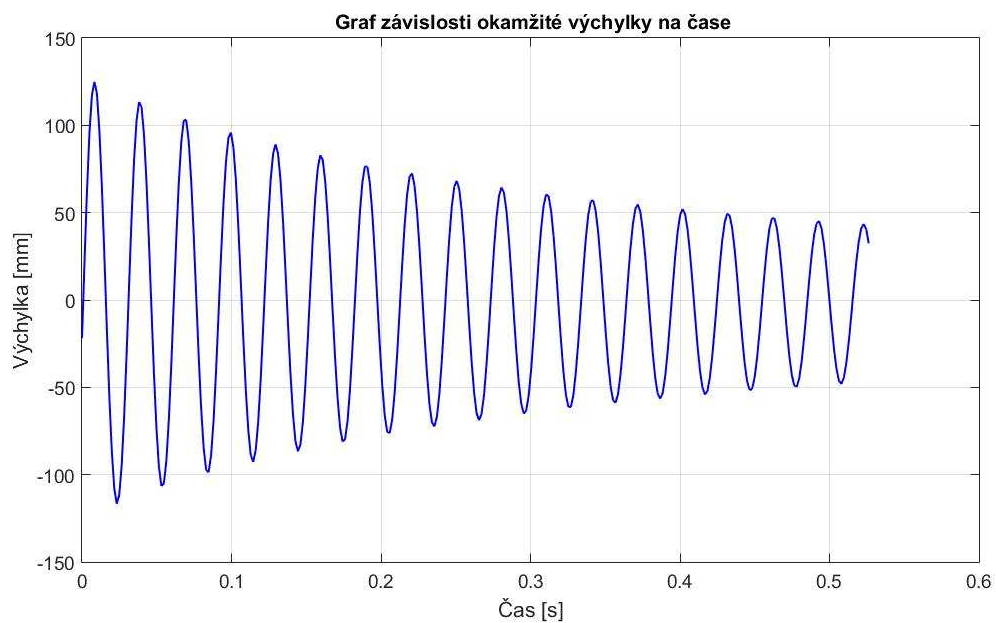
Obr. 60 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2005



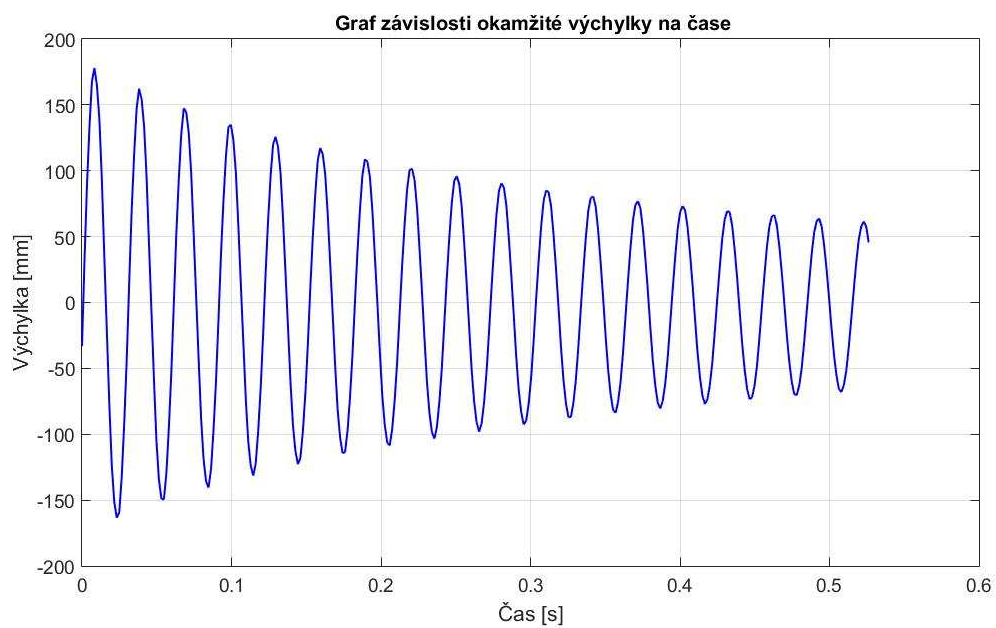
Obr. 61 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2006



Obr. 62 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2007



Obr. 63 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2008

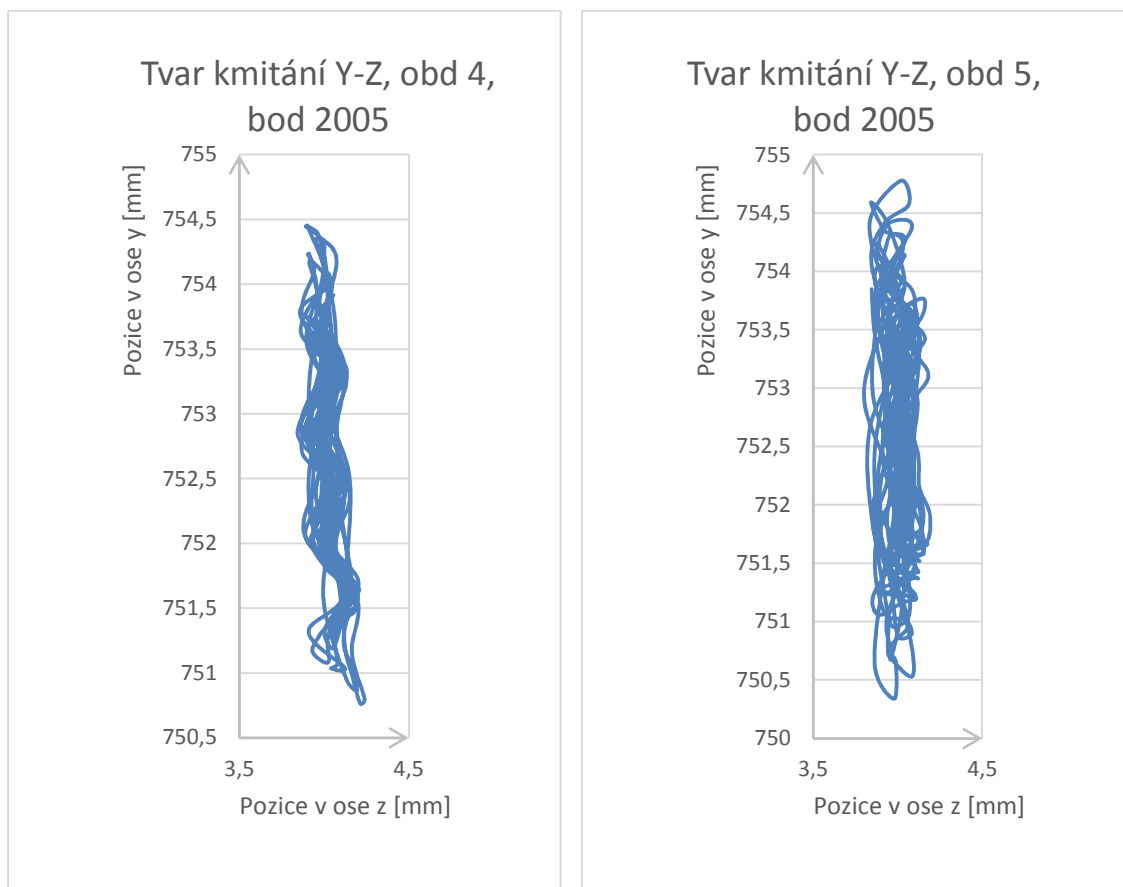


Obr. 64 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2009

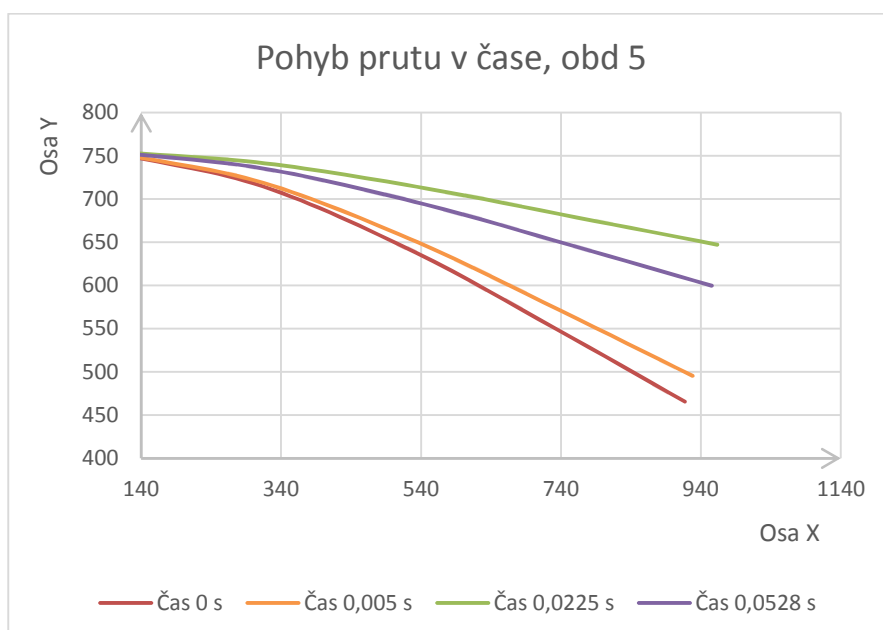
Shrnutí výsledků prvních tří vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od teoretické hodnoty:

Tabulka 2 Shrnutí výsledků obd 4 a obd 5

Teoretická hodnota	Pontos			
	obd4	[%]	obd5	[%]
1,3583	1,3125	-3,3719	1,3125	-3,3719
8,5122	-		-	
23,8343	22,6875	-4,8116	22,6875	-4,8116



Obr. 65 Tvar kmitání v ose Y-Z, obd 4 (vlevo) obd 5 (vpravo), bod 2005



Obr. 66 Ukázka kmitání prutu s časem při měření: obd 5



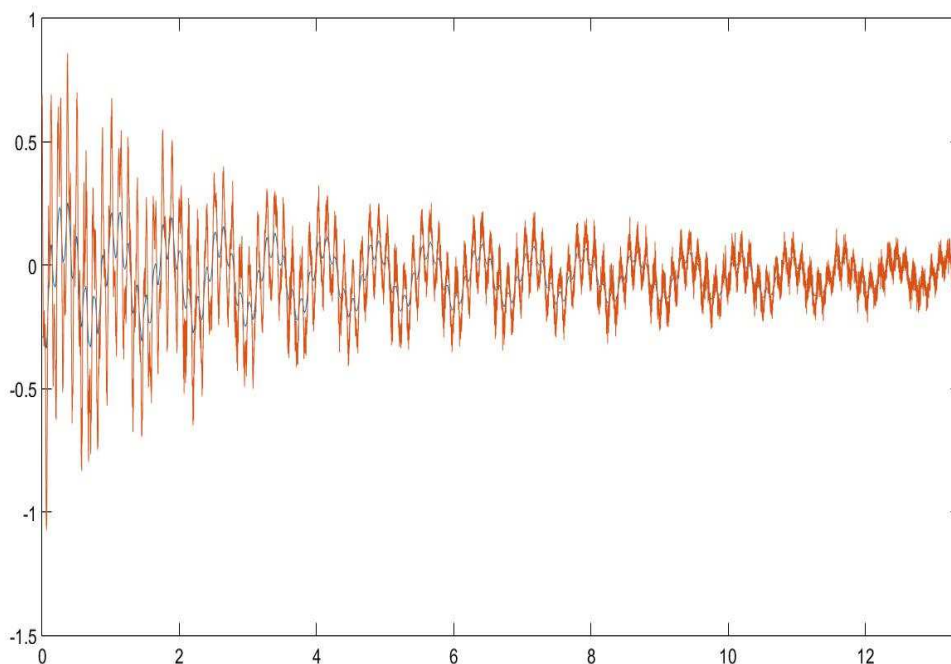
Pruty, díky svému průřezu, kmitaly mnohem více v ose Y s mírnými výkyvy v ose Z. V rámci analýzy vlastní frekvence se ani v jednom případě nepodařilo oproti teoretické analýze naléznout druhou frekvenci. Výsledky pro obě měření jsou shodné a rozdíl oproti první teoretické hodnotě činí -3,37% a oproti třetí -4,81%.

### 5.1.6 Vyhodnocení měření s použitím akcelerometru

Ke kontrole měření bylo provedeno připojení akcelerometru Kistler se zesilovačem (typ M122AC1C5, výrobní číslo 000003), který byl pro zpracování signálu napojen na program Dewesoft. Akcelerometr zaznamenával závislost zrychlení na čase s vzorkovací frekvencí 1000 Hz a byl připojen pouze na dva body blízké vetknutí (2005 a 2006), aby se co nejméně projevoval vliv přidané hmotnosti akcelerometru.

Pro možnost aplikace získaných dat do vytvořených programů v Matlabu bylo nutné data z akcelerometru integrovat, aby se získala informace o výchylce a nikoliv o zrychlení. K tomuto účelu byl vytvořen program *integrace.m* (uveden v příloze), který data integroval pomocí obdélníkové metody. Dále byla data analyzována jako v předchozích případech pomocí programu *Tofurier.m*.

Při analýze dat z akcelerometru se však vlivem vlastního kmitání akcelerometru zobrazovalo parazitní kmitání, které představovalo pohyb samotného akcelerometru (dokmity). Byla snaha tyto parazitní kmity odstranit filtrem přímo v programu, avšak výsledky filtrace vytvářely velké nepřesnosti a proto byla analýza provedena s původními daty. Použití filtru je zobrazeno na Obr. 67, kde červené kmity představují původní hodnoty získané z akcelerometru a modré jsou upravené hodnoty po filtraci. K porovnání budou uvedeny i výsledné hodnoty vlastní frekvence analyzované přímo v programu Dewesoft.



Obr. 67 Použití filtru na data získaná z akcelerometru

Pro všechny měření pomocí systému Pontos platí kalibrace uvedená v kapitole 5.1.1 a také hodnoty nastavení uvedené v kapitole 5.1.3:

- snímkovací frekvence 24 Hz
- čas uzávěrky 1,666 ms
- zabudovaná světla při měření zapnuta
- bez přídavného osvětlení
- clona na kamerách 6,5

**1) Kmitání vetknutého nosníku kruhového průřezu, délka 1060 mm**

- kruhový průřez o průměru: 5mm
- materiál: ocel
- hustota materiálu: 7850 kg/m<sup>3</sup>
- modul pružnosti v tahu: 210 000 MPa
- délka vetknutí: 1060mm
- počet měřených bodů: 5
- umístění bodů od volného konce prutu: 0mm (bod 2009)  
210mm (bod 2008)  
420mm (bod 2007)  
645mm (bod 2006)  
875 mm (bod 2005)
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 6,8 m
- počet měření: 2
- datum měření: 18. 3. 2016
- označení v souborech: AKCkruh5, AKCkruh6
- zatížení: lehký úder prsty ve směru osy Y do volného konce prutu  
akcelerometr připevněný lepicí páskou vedle bodu 2005 (AKCkruh5)  
a 2006 (AKCkruh6)



Obr. 68 Umístění a upevnění akcelerometru při měření AKCkruh5





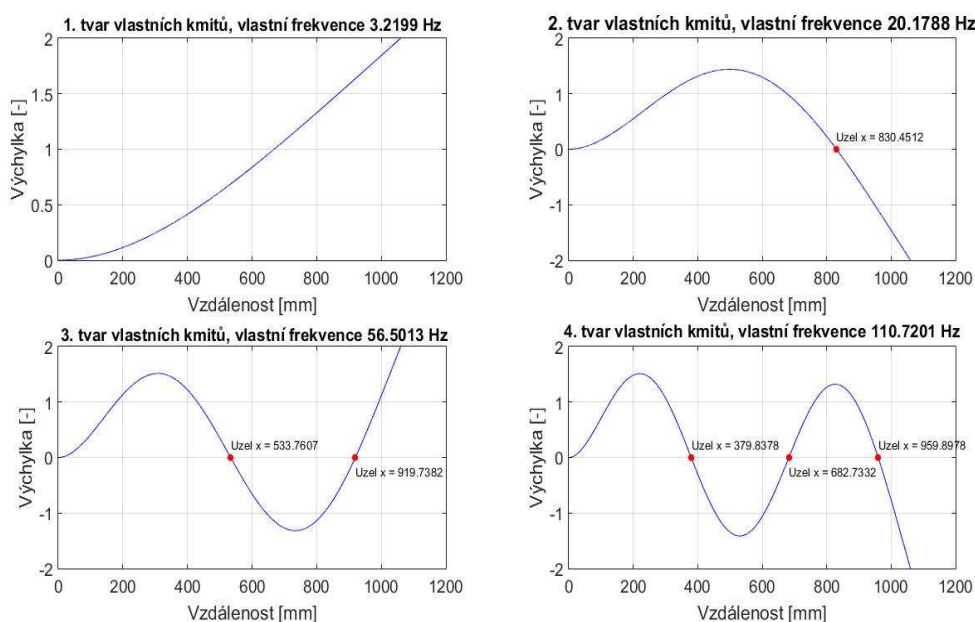
Obr. 69 Umístění a upevnění akcelerometru při měření AKCkruh6

Teoretická data získaná programem *vetnos.m* a *start.m*:

První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou **3,2199 Hz, 20,1788 Hz, 56,5013 Hz, 110,7201 Hz.**

Uzlové body pro první čtyři tvary kmitání (vzdálenostech od vetknutého konce v mm):

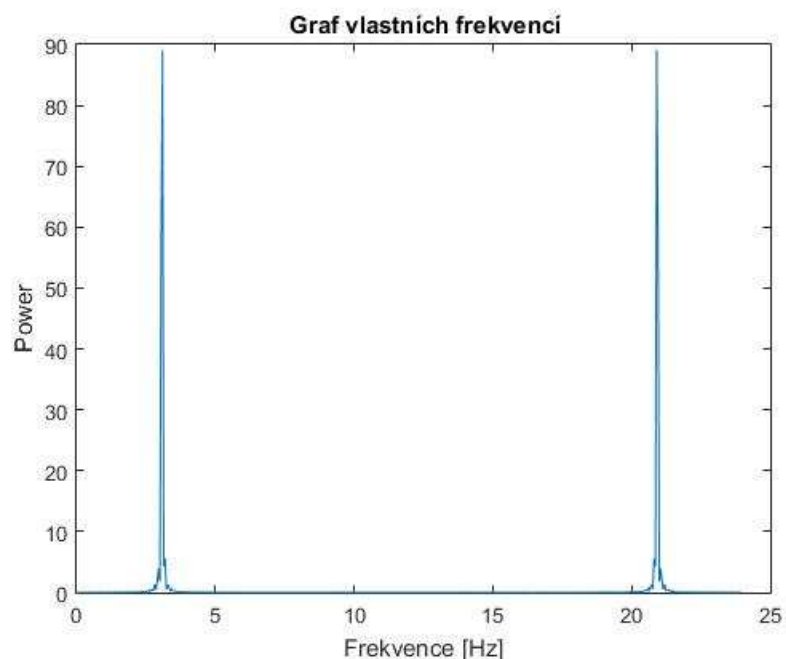
1. tvar 0
2. tvar 0      830.4512
3. tvar 0      533.7607      919.7382
4. tvar 0      379.8378      682.7332      959.8978



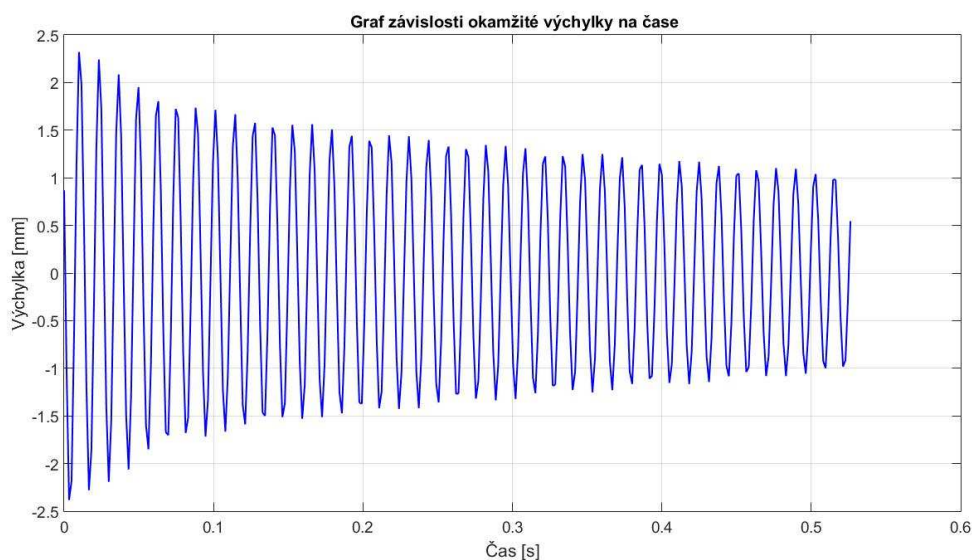
Obr. 70 Teoretické hodnoty vlastních frekvencí pro prut kruhového průřezu o délce 1060 mm a tvary vlastních kmitů

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – AKCkruh5:

vyhodnocení pro bod 2005: vlastní frekvence **3,0938 Hz a 20,9063 Hz**



Obr. 71 Vlastní frekvence, AKCkruh 5, bod 2005

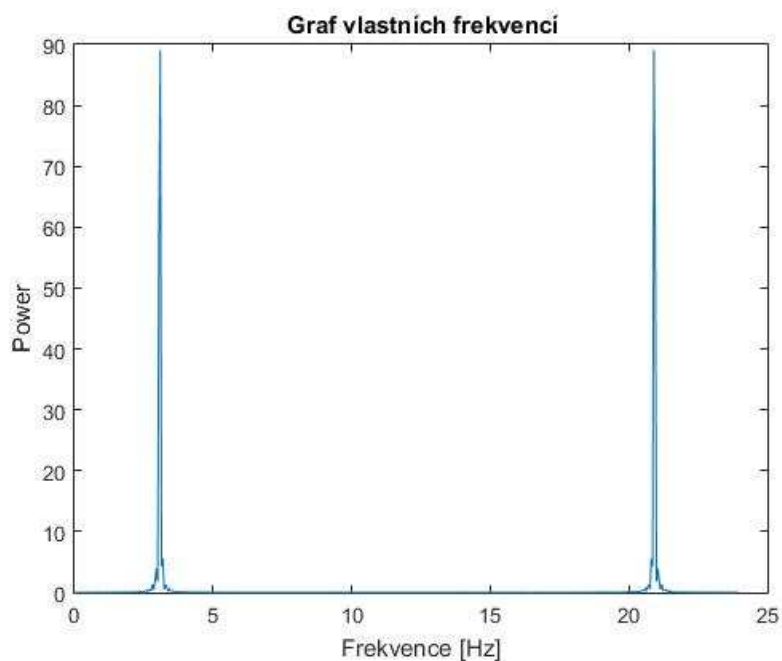


Obr. 72 Graf výchylka / čas, AKCkruh5, bod 2005

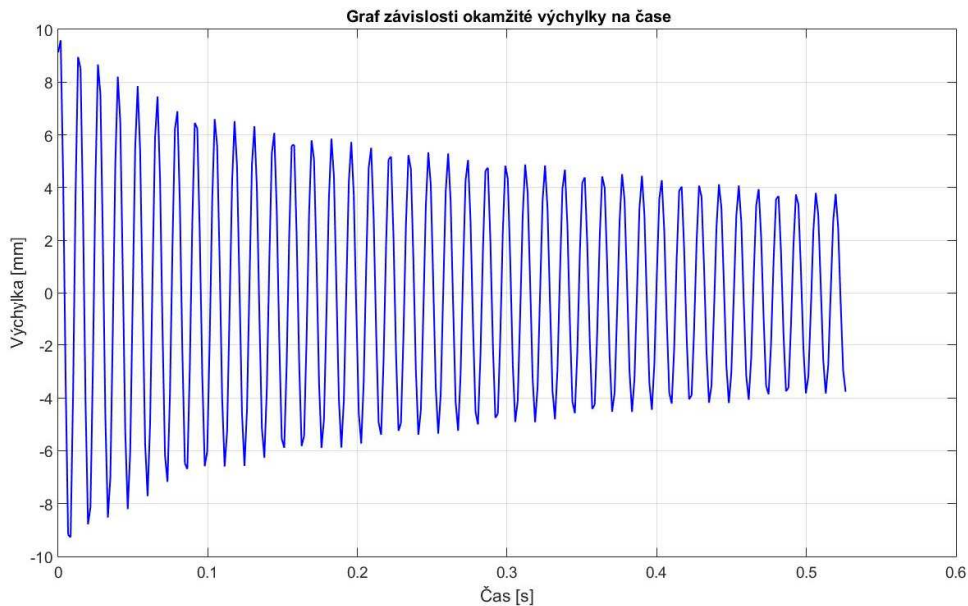
Jelikož v této diplomové práci jde především o zjištění, zda jsou data získaná ze systému Pontos odpovídající jiným metodám, bude v tomto i následujících měřeních zobrazován graf závislosti okamžité výchylky na čase pouze pro bod na kterém je aktuálně připojen akcelerometr. Z dat přiložených k této diplomové práci lze získat tuto závislost pro všechny body, ale není cílem této práce tuto závislost porovnávat a vyhodnocovat v celém měřítku.

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – AKCkruh6:

vyhodnocení pro bod 2006: vlastní frekvence **3,0938 Hz a 20,9063 Hz**



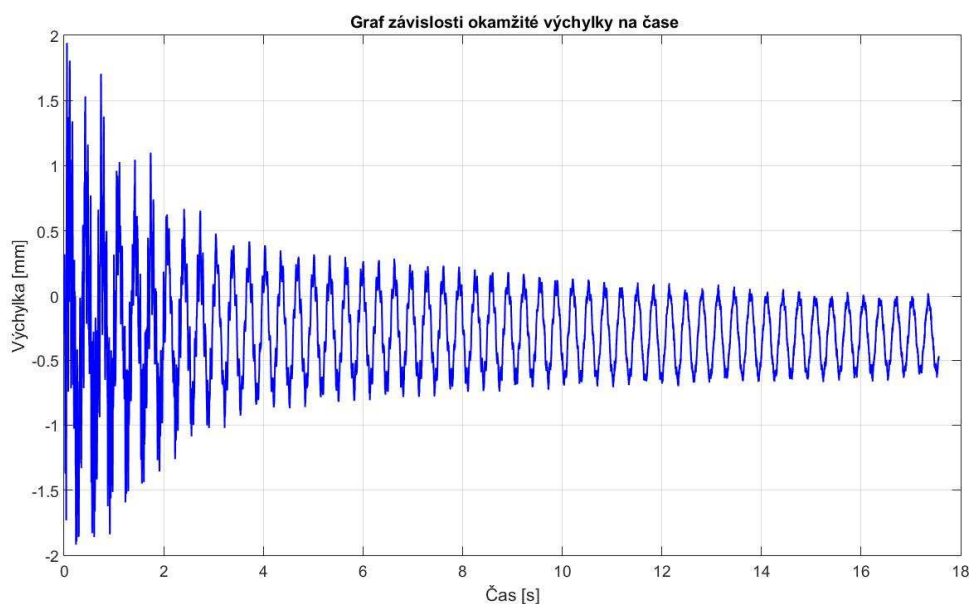
Obr. 73 Vlastní frekvence, AKCkruh6, bod 2006



Obr. 74 Graf výchylka / čas, AKCkruh6, bod 2006

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2005, analyzovaná v programu Matlab – AKCkruh5:

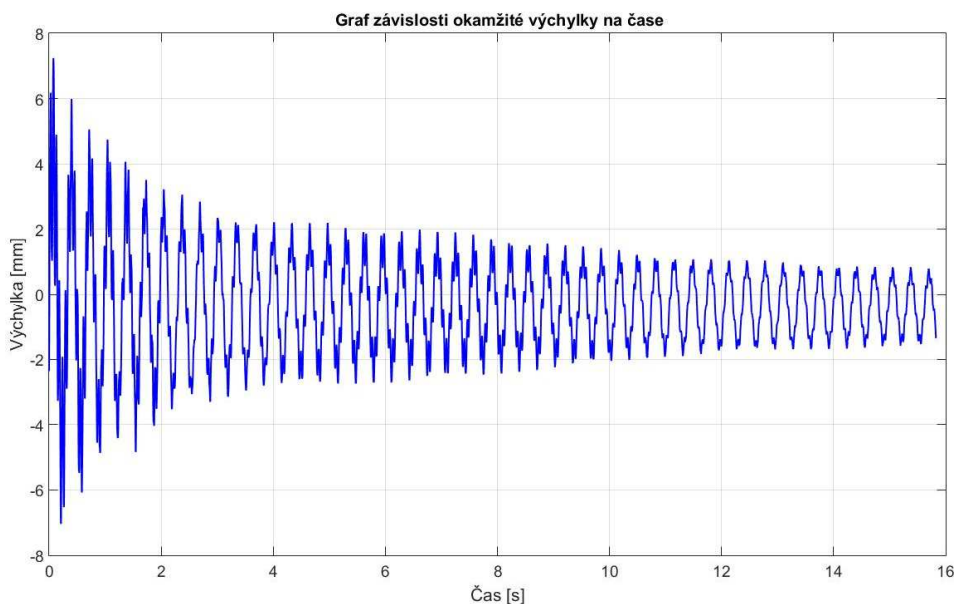
vlastní frekvence **3,0634 Hz**



Obr. 75 Graf výchylka / čas, AKCkruh5, bod 2005 - akcelerometr

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2006, analyzovaná v programu Matlab – AKCkruh6:

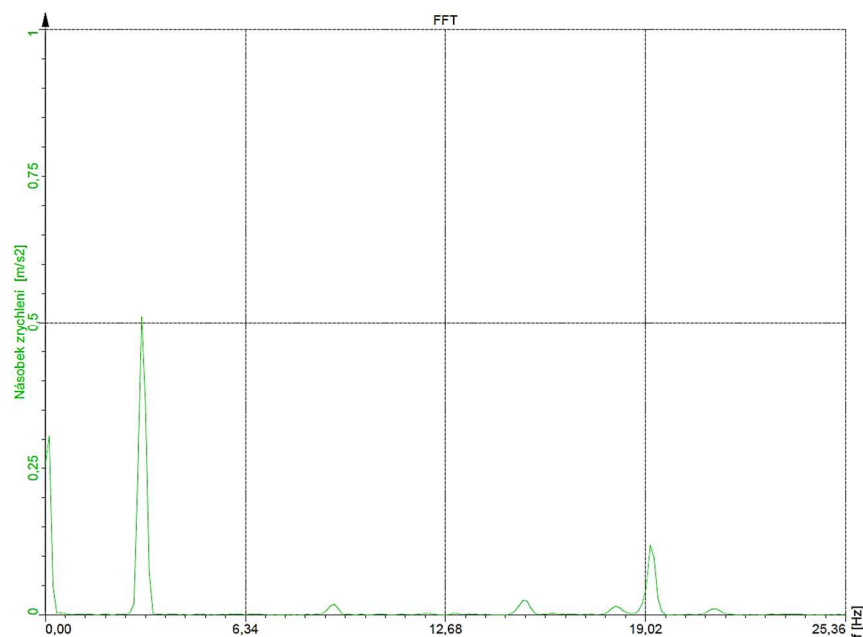
vlastní frekvence **3,0518 Hz**



Obr. 76 Graf výchylka / čas, AKCkruh6, bod 2006 - akcelerometr

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2005, analyzovaná v programu Dewesoft – AKCkruh5:

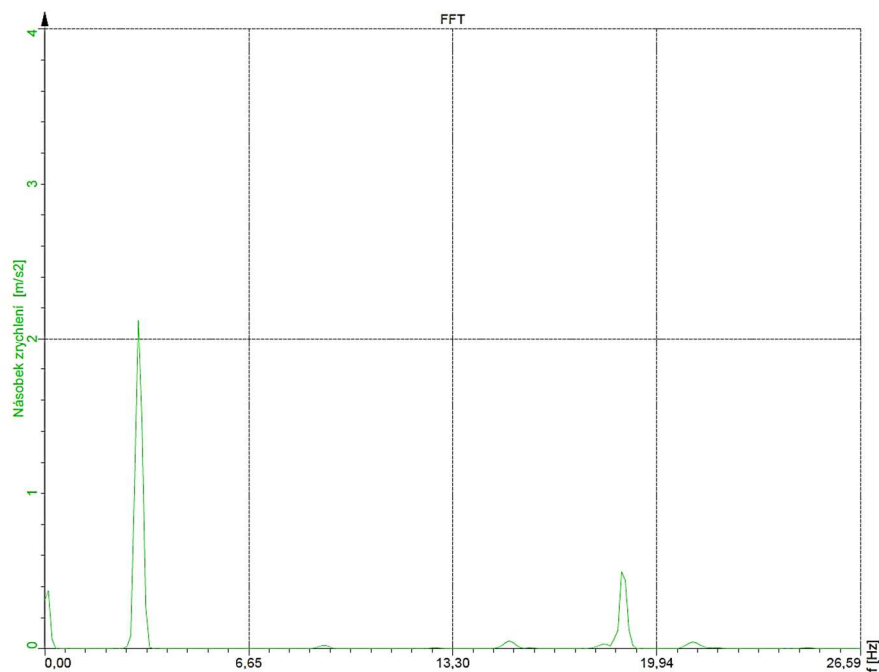
vlastní frekvence **3,052 Hz a 19,165 Hz**



Obr. 77 Vlastní frekvence, AKCkruh 5, bod 2005, program Dewesoft

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2006, analyzovaná v programu Dewesoft – AKCkruh6:

vlastní frekvence **3,052 Hz a 18,799 Hz**



Obr. 78 Vlastní frekvence, AKCkruh 6, bod 2006, program Dewesoft

Shrnutí výsledků prvních dvou vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od hodnoty zjištěné systémem Pontos pro měření AKCkruh5:

Tabulka 3 Shrnutí výsledků AKCkruh5

Pontos	Akcelerometr - Matlab		Akcelerometr - Dewesoft		Teoretická hodnota	
AKCkruh 5	AKCkruh 5	[%]	AKCkruh 5	[%]		[%]
3,0938	3,0634	-0,9826	3,0520	-1,3511	3,2199	4,0759
20,9063			19,1650	-8,3291	20,1788	-3,4798

Shrnutí výsledků prvních dvou vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od hodnoty zjištěné systémem Pontos pro měření AKCkruh6:

Tabulka 4 Shrnutí výsledků AKCkruh6

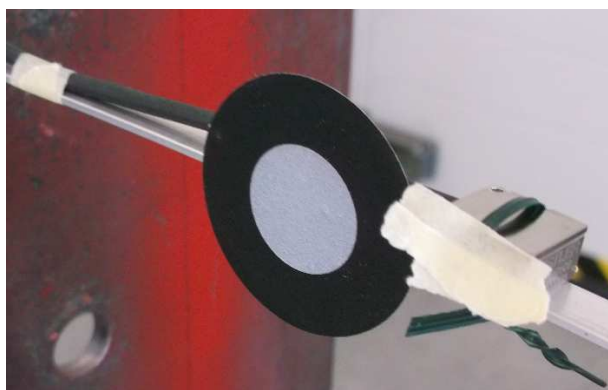
Pontos	Akcelerometr - Matlab		Akcelerometr - Dewesoft		Teoretická hodnota	
AKCkruh 6	AKCkruh 6	[%]	AKCkruh 6	[%]		[%]
3,0938	3,0518	-1,3576	3,0520	-1,3511	3,2199	4,0759
20,9063			18,7990	-10,0797	20,1788	-3,4798

Z porovnání okamžitých výchylek zjištěných systémem Pontos a akcelero-  
metrem je vidět, že akcelerometr byl umístěn vždy blíže vetknutí a kvůli tomu vy-  
kazuje menší zaznamenané výchylky než Pontos.

Při porovnávání vlastních frekvencí nemůžeme dostatečně brát v úvahu teo-  
retickou hodnotu, jelikož ta nepočítá s tím, že je na prutu připnut akcelerometr,  
tzn. na prutu je přídavná hmota. Z hodnot z akcelometru, analyzovaných  
v programu Matlab, se podařilo získat pouze první vlastní frekvenci, což může být  
způsobené kmitáním samotného akcelometru a následným nepoužitím filtru při  
analýze.

Rozdíly mezi hodnotami vlastních frekvencí zjištěných pomocí Pontosu  
a akcelometru nejsou výrazné a z větší části můžeme rozdíl přičítat způsobu  
upevnění akcelometru na prut.

Výsledky systému Pontos jsou shodné pro první (AKCkruh5) i druhé měření  
(AKCkruh6).



Obr. 79 Detail upevnění akcelometru

## 2) Kmitání vetknutého nosníku obdélníkového průřezu, délka 930 mm

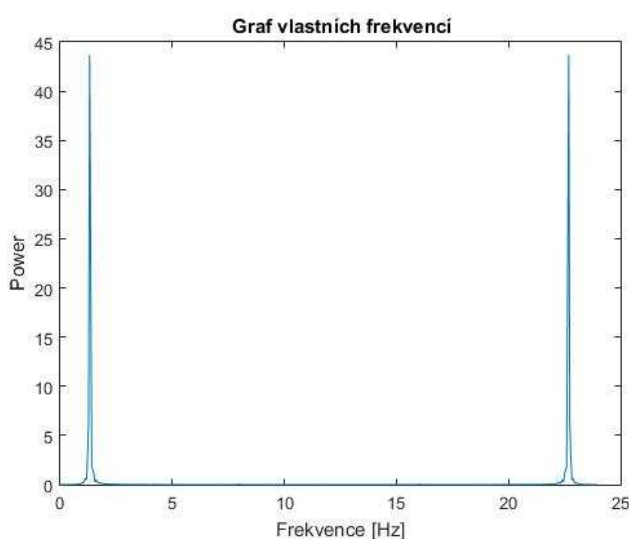
- obdélníkový průřez: 1,4x7,4mm
- materiál: ocel
- hustota materiálu: 7850 kg/m<sup>3</sup>
- modul pružnosti v tahu: 210 000 MPa
- délka vetknutí: 930 mm
- počet měřených bodů: 5
- umístění bodů od volného konce prutu: 0mm (bod 2009)  
210mm (bod 2008)  
420mm (bod 2007)  
650mm (bod 2006)  
875 mm (bod 2005)
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 6,8 m
- počet měření: 2
- datum měření: 18. 3. 2016
- označení v souborech: AKCobd1, AKCobd3
- zatížení: lehký úder prsty ve směru osy Y do volného konce prutu  
akcelerometr připevněný lepicí páskou vedle bodu 2005 (AKCobd1)  
a 2006 (AKCobd3)

Teoretická data získaná programem *vetnos.m* a *start.m*:

První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou **1,3583 Hz, 8,5122Hz, 23,8343 Hz, 46,7057 Hz** - výsledky byly reprezentovány již v kapitole 5.1.5

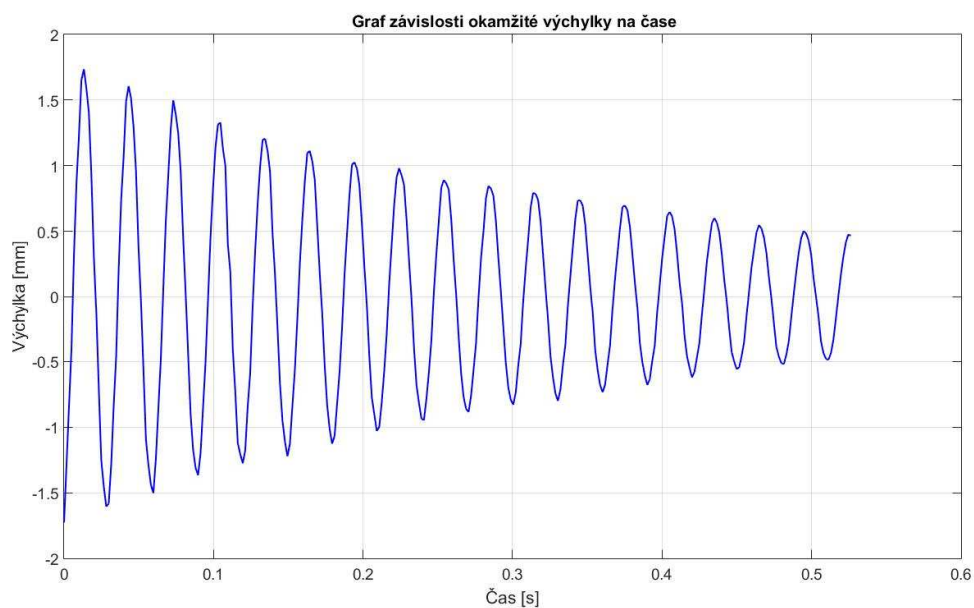
Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – AKCobd1:

vyhodnocení pro bod 2005: vlastní frekvence **1,3125 Hz a 22,6875 Hz**



Obr. 80 Vlastní frekvence, AKCobd1, bod 2005

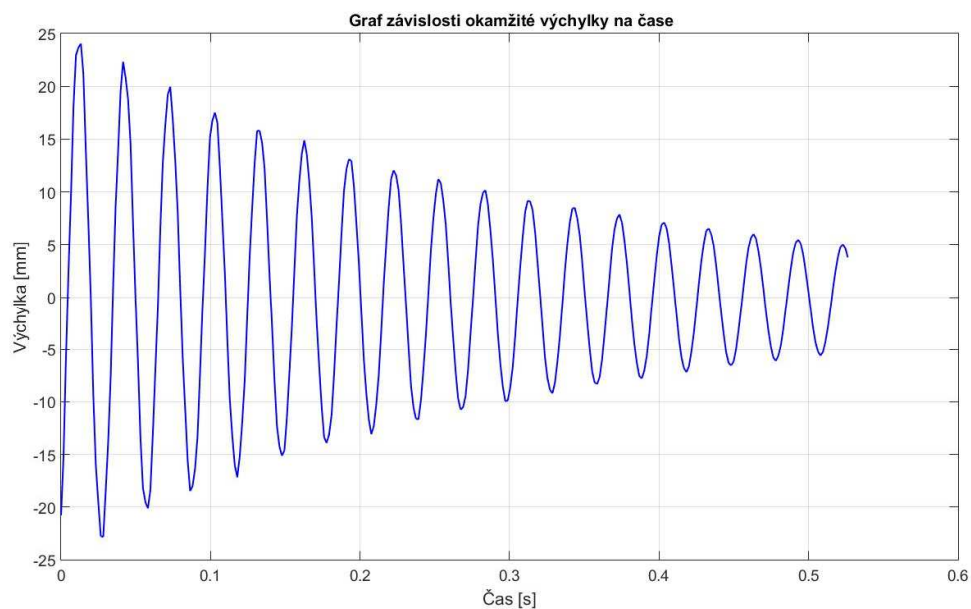




Obr. 81 Graf výchylka / čas, AKCobd1, bod 2005

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – AKCobd3:

vyhodnocení pro bod 2006: vlastní frekvence **1,3125 Hz a 22,6875 Hz** (stejná jako u měření AKCobd1)

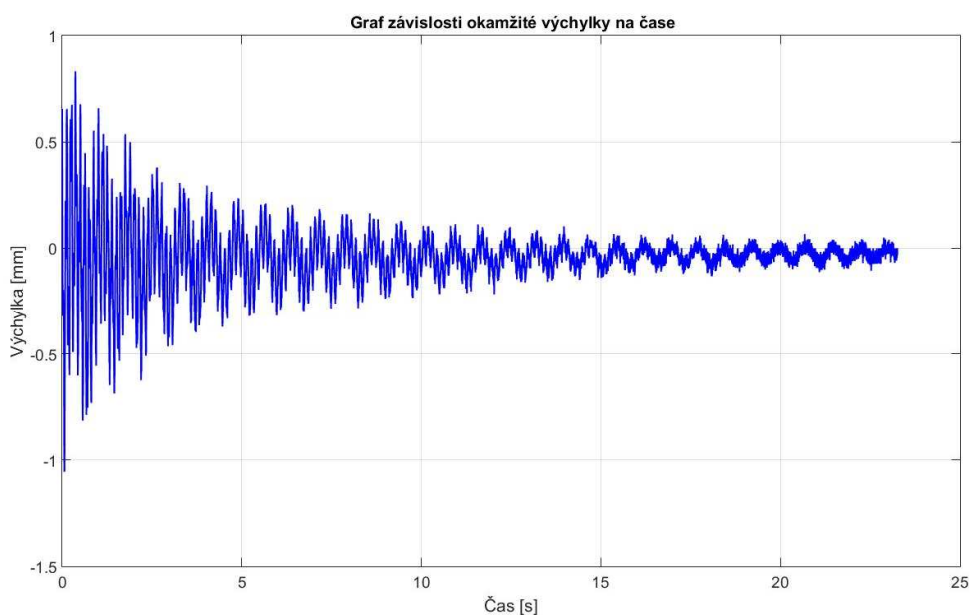


Obr. 82 Graf výchylka / čas, AKCobd3, bod 2006



Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2005, analyzovaná v programu Matlab – AKCobd1:

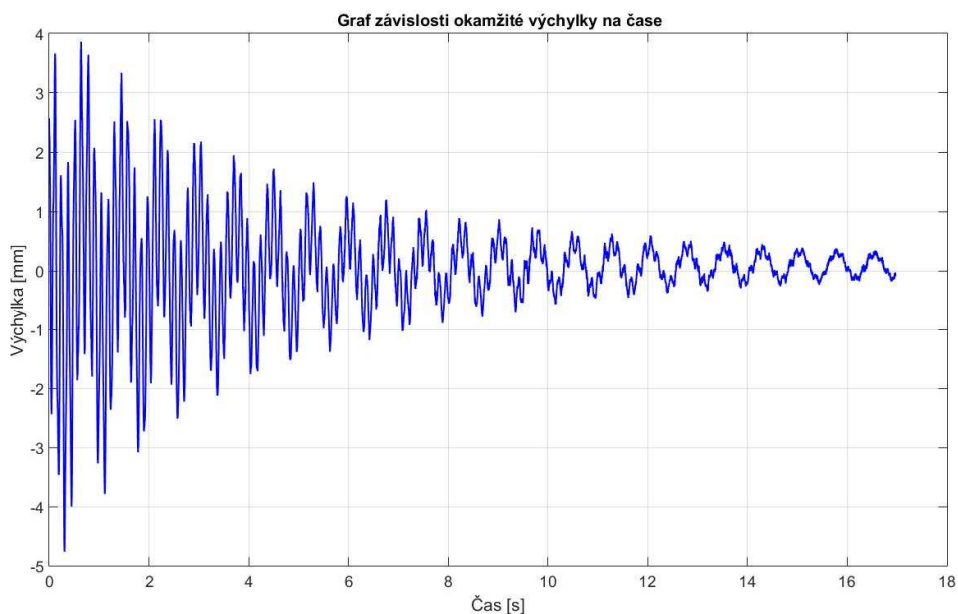
vlastní frekvence **7,9346 Hz**



Obr. 83 Graf výchylka / čas, AKCobd1, bod 2005 – akcelerometr

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2006, analyzovaná v programu Matlab – AKCobd3:

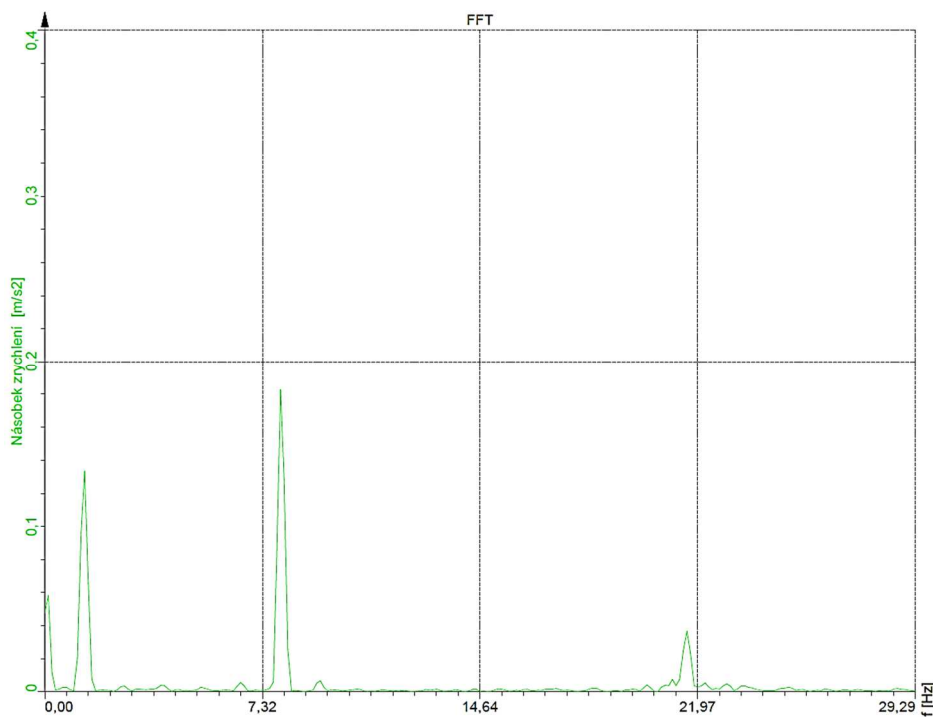
vlastní frekvence **7,5378 Hz**



Obr. 84 Graf výchylka / čas, AKCobd3, bod 2006 – akcelerometr

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2005, analyzovaná v programu Dewesoft – AKCobd1:

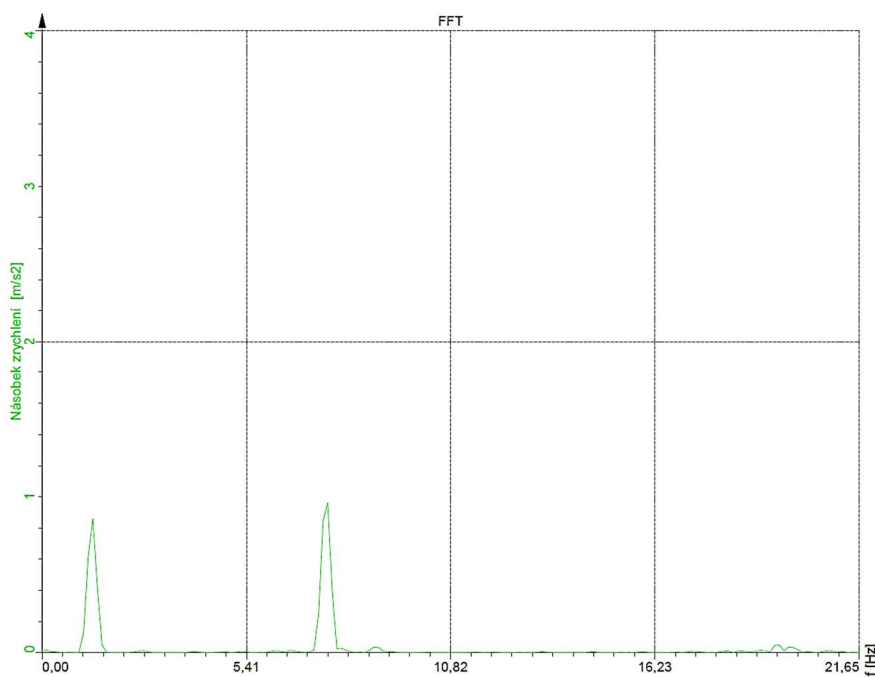
vlastní frekvence **1,343 Hz, 8,057 Hz, 21,606 Hz**



Obr. 85 Vlastní frekvence, AKCobd1, bod 2005, program Dewesoft

Experimentální data získaná akcelerometrem u bodu 2006, analyzovaná v programu Dewesoft – AKCobd3:

vlastní frekvence **1,343 Hz, 7,568 Hz, 19,897 Hz**



Obr. 86 Vlastní frekvence, AKCobd1, bod 2006, program Dewesoft

Shrnutí výsledků prvních tří vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od hodnoty zjištěné systémem Pontos pro měření AKCobd1:

Tabulka 5 Shrnutí výsledků AKCobd1

Pontos	Akcelerometr - Matlab		Akcelerometr - Dewesoft		Teoretická hodnota	
AKCobd1	AKCobd1	[%]	AKCobd1	[%]		[%]
1,3125			1,3430	2,3238	1,3583	3,4895
	7,9346		8,0570		8,5122	
22,6875			21,606	-4,7669	23,8343	5,0548

Shrnutí výsledků prvních třech vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od hodnoty zjištěné systémem Pontos pro měření AKCobd3:

Tabulka 6 Shrnutí výsledků AKCobd3

Pontos	Akcelerometr - Matlab		Akcelerometr - Dewesoft		Teoretická hodnota	
AKCobd3	AKCobd3	[%]	AKCobd3	[%]		[%]
1,3125			1,3430	2,3238	1,3583	3,4895
	7,5378		7,5680		8,5122	
22,6875			19,897	-12,2997	23,8343	5,0548

U měření obdélníkového průřezu dokázal Pontos analyzovat pouze první a třetí vlastní frekvenci. Při porovnání těchto hodnot s teoretickými hodnotami, vznikne rozdíl v identifikovaných frekvencích nejvíce 5,05% (teoretické hodnoty opět nemusejí být směrodatné, pruty jsou zatížené hmotností akcelerometru a s tímto zatížením teoretický výpočet nepočítá). Akcelerometr při analýze hodnot v programu Dewesoft analyzoval tři vlastní frekvence, z čehož první a třetí frekvence se blíží hodnotám zjištěných při použití systému Pontos a následné analýze v programu Matlab. Druhá vlastní frekvence byla také zjištěna při analýze dat z akcelerometru pomocí programu Matlab, avšak z důvodu nedostatečné kvality dat se nepodařilo získat další vlastní frekvence.



Obr. 87 Detail nalepení bodů na prutu obdélníkového průřezu

## 5.2 Frekvenční analýza křídla

Pro další měření bylo použito křídlo letounu SportStar, vč. G2 00-02 51 od společnosti Evektor. Rozměry křídla jsou uvedeny na Obr. 91, na kterém je také zobrazeno rozmístění snímaných bodů systémem Pontos.

### 5.2.1 Kalibrace systému

Kalibrace systému byla provedena stejným způsobem a při stejném nastavení jako u kalibrace pro měření prutů, pouze se změnou vzdálenosti mezi kalibračním křížem a optickým systémem, která v tomto případě činila 7,14 metrů. Výsledek kalibrace:

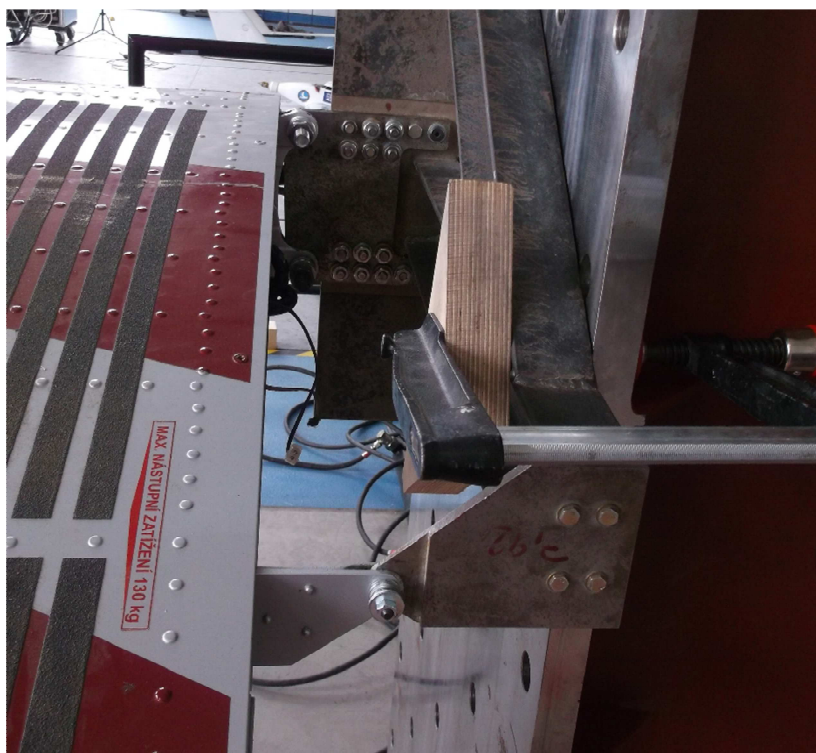
General	
Calibration date	Thu Apr 14 10:29:36 2016
Calibration object	
Object type	Cross (coded)
Name	Calibration cross
Calibration scale	Distance 1: 1721.207 mm
	Distance 2: 1717.421 mm
Certification temperature	20.0 °C
Expansion coefficient	$-0.85 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$
Measurement Temperature	20.0 °C
Calibration settings	
Camera lenses	50.00 mm
Results	
Calibration deviation	0.030 pixels
Scale deviation	0.021 mm
Camera angle	13.5°
Angle variance	-5.3 / 13.2°
Height variance	897 mm
Measuring volume	3255 / 2495 / 2495 mm



Obr. 88 Kalibrace pro měření vlastní frekvence křídla

### 5.2.2 Příprava experimentu

Křídlo bylo, pomocí závěsů, připevněno šrouby do připraveného přípravku pro vytvoření vetknutí a křídélko bylo zabezpečeno proti pohybu. Kamerový systém Pontos byl postaven tak, aby jako nejbližší část křídla byla náběžná hrana, která byla od systému vzdálená 6,74 metru. Tato vzdálenost je kratší, než byla vzdálenost systému od kalibračního kříže, což je z toho důvodu, že tentokrát budou body umístěné po hloubce křídla, takže kamerový systém musí být vzdálen 7,14 metrů (jako při kalibraci) od středu mezi body umístěnými na náběžné hraně a zadním nosníku.



Obr. 89 Uchycení křídla

Na spodní část potahu křídla bylo umístěno celkem šest měřených bodů, vždy po třech na hlavní a vedlejší nosník a dále pak tři body na náběžnou hranu. Body byly použity stejné jako u měření prutů, avšak kvůli tvaru křídla bylo nutné použít plastové přípravky, které byly ke křídlu přilepeny tavným lepidlem (kromě bodů na náběžné hraně, zde nejsou přípravky potřebné).



Obr. 90 Připevnění měřených bodů na spodní potah křídla





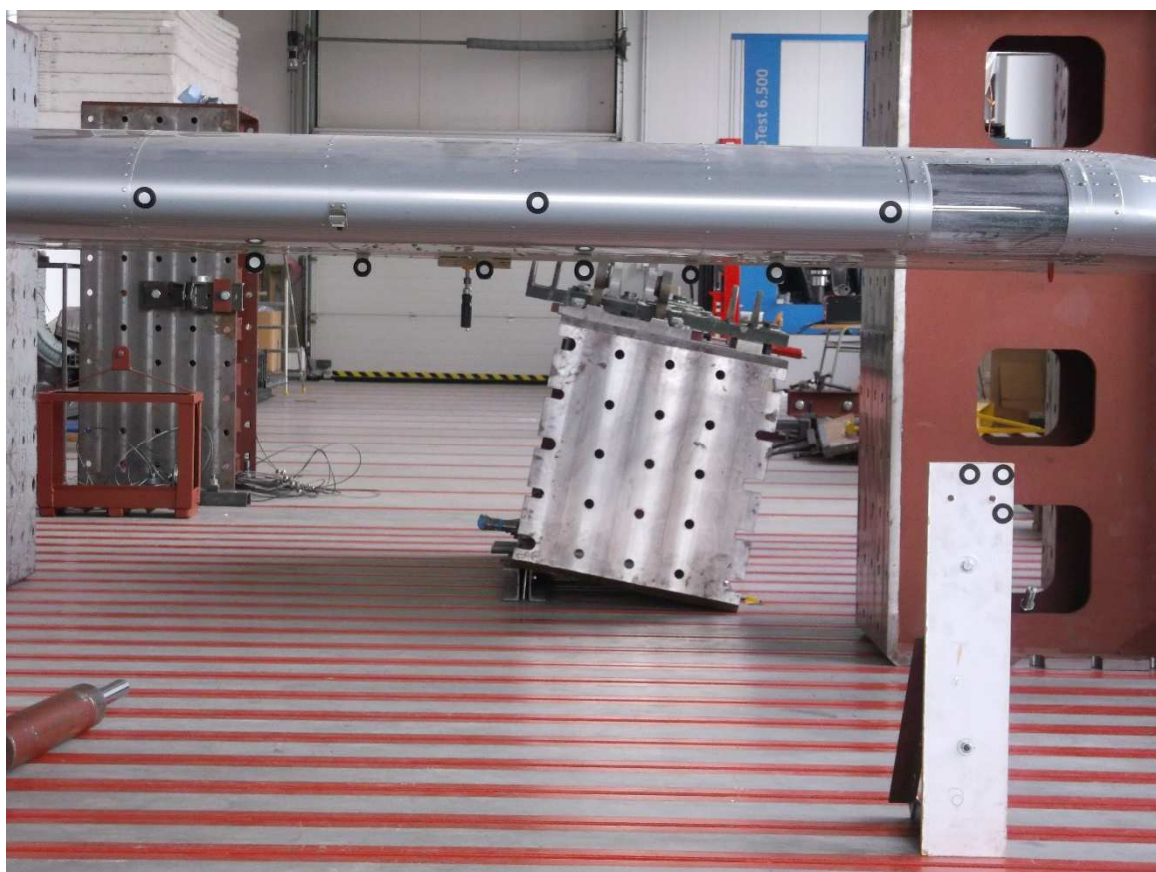
Měřené body jsou na Obr. 91 číselně označeny tak, jak jsou označeny po výpočtu systémem Pontos a jejich vzdálenosti od závěsu jsou následující:

Body na náběžné hraně křídla:	č. 2000	1800mm
	č. 2004	2400mm
	č. 2008	2950mm

Body na hlavním nosníku:	č. 2001	1950mm
	č. 2005	2500mm
	č. 2007	2825mm

Body na zadním nosníku:	č. 2002	2070mm
	č. 2003	2350mm
	č. 2006	2740mm

Další tři body 2009, 2010 a 2011 sloužily jako statické body pro vytvoření souřadného systému v programu Pontos.



Obr. 92 Pozice měřených bodů

Ke kontrole naměřených hodnot systémem Pontos byl znovu využíván akcelerometr Kistler (vyhodnocování dat v programu Dewesoft), který byl používán při měření prutů. Akcelerometr byl v jednotlivých měřeních přilepován oboustrannou lepicí páskou na horní část potahu nad místa nalepených měřících bodů pro systém Pontos.



Obr. 93 Ukázka umístění a připevnění akcelerometru

### 5.2.3 Realizace experimentu

Pro nastavení systému Pontos bylo použito stejné nastavení jako v předchozích měřeních:

- snímkovací frekvence 24 Hz
- čas uzávěrky 1,666 ms
- zabudovaná světla při měření zapnuta
- bez přídavného osvětlení
- clona na kamerách 6,5

Umístění akcelerometru při jednotlivých měřeních (celkem provedeno 6 měření):

měření č. 1 a 2 – nad bodem 2007

měření č. 3 – nad bodem 2006

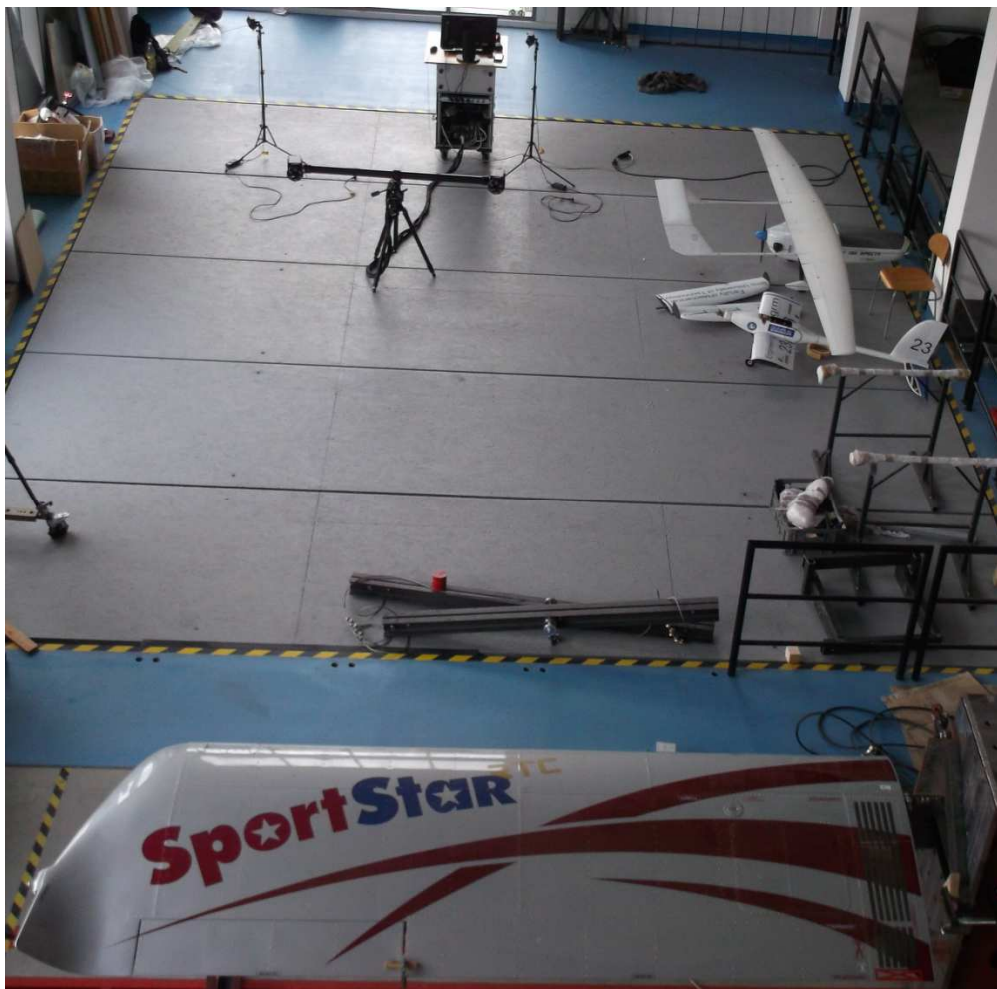
měření č. 4 – nad bodem 2004

měření č. 5 – nad bodem 2008

měření č. 6 – nad bodem 2001



Jako budící signál kmitání byl zvolen úder rukou do koncové části horního potahu křídla.

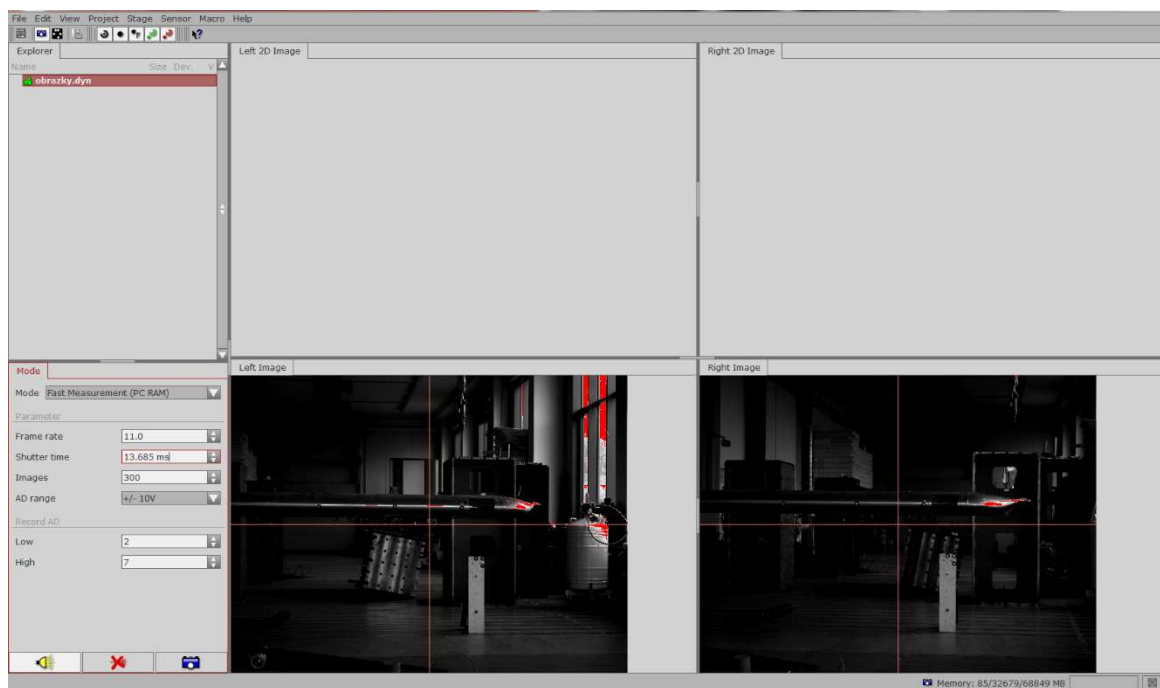


Obr. 94 Pohled shora na připravené měření

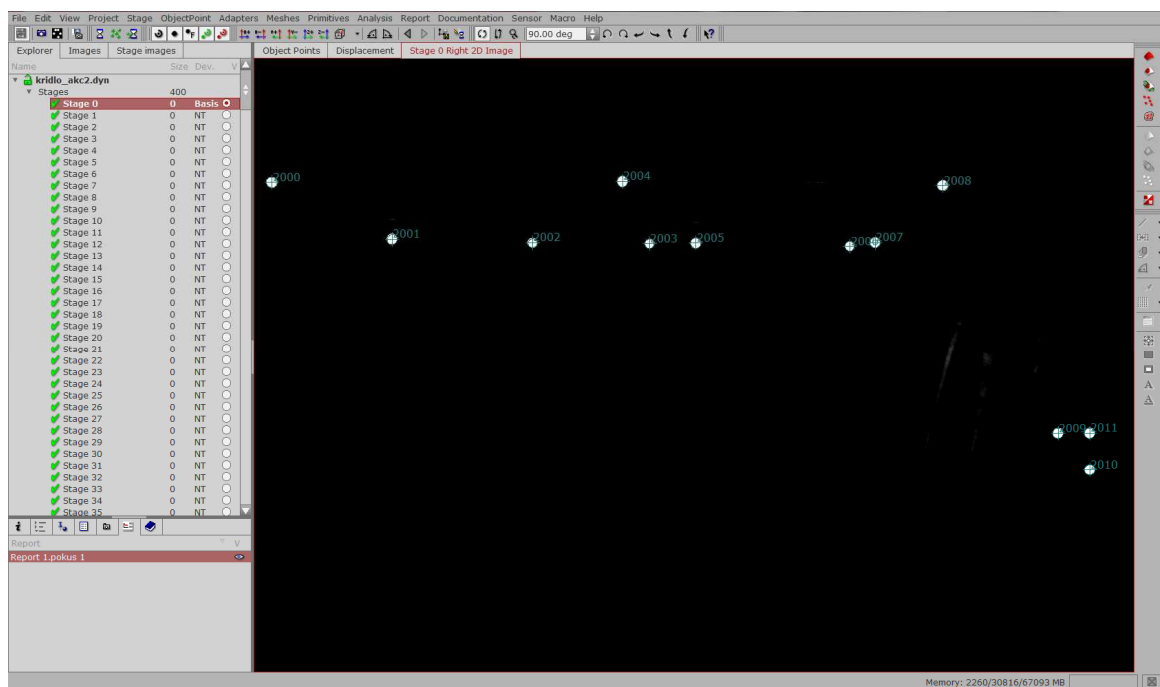
#### 5.2.4 Vyhodnocení experimentu

Vyhodnocování probíhalo stejným způsobem jako u vyhodnocování prutů:

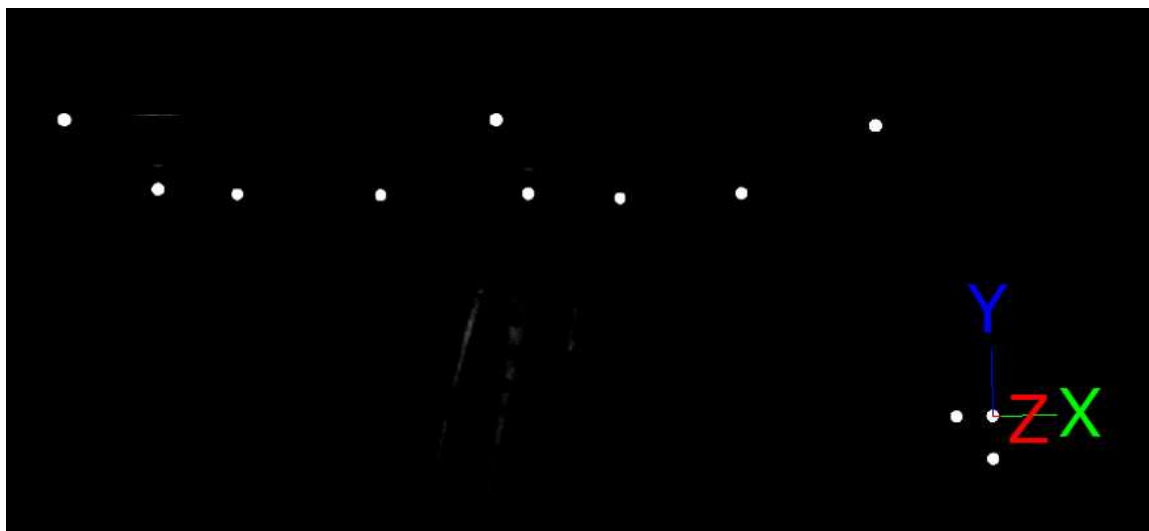
- 1) identifikace a analýza bodů v programu Pontos, vytvoření souřadného systému
- 2) export posunutí jednotlivých bodů do textového souboru
- 3) rozdělení textového souboru na jednotlivé body pomocí funkce *ftransformPONTOS.m* v *Matlabu*
- 4) zjištění střední hodnoty, kolem které kmitají jednotlivé body v ose Y
- 5) změna hodnot posunutí bodů v ose Y pomocí funkce *posunuti.m*
- 6) použití programu *Tofourier.m* pro zadání hodnot do programu *furiert.m*
- 7) zjištění hodnoty vlastní frekvence kmitání
- 8) porovnání s výsledky zjištěnými pomocí akcelerometru



Obr. 95 Příprava měření v programu Pontos



Obr. 96 Identifikované body na křídle v programu Pontos



Obr. 97 Souřadný systém pro měření systémem Pontos

### 1) Měření č.1 a č.2, akcelerometr na pozici bodu 2007

- pozice bodu: hlavní nosník
- vzdálenost od závěsu: 2825 mm
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 7,08 m
- počet měření: 2
- datum měření: 14. 4. 2016
- označení v souborech: Kridlo1, Kridlo2
- zatížení: úder rukou ve směru osy Y na horní stranu potahu na konci křídla
- akcelerometr připevněný lepicí páskou na horní straně potahu nad bodem 2007

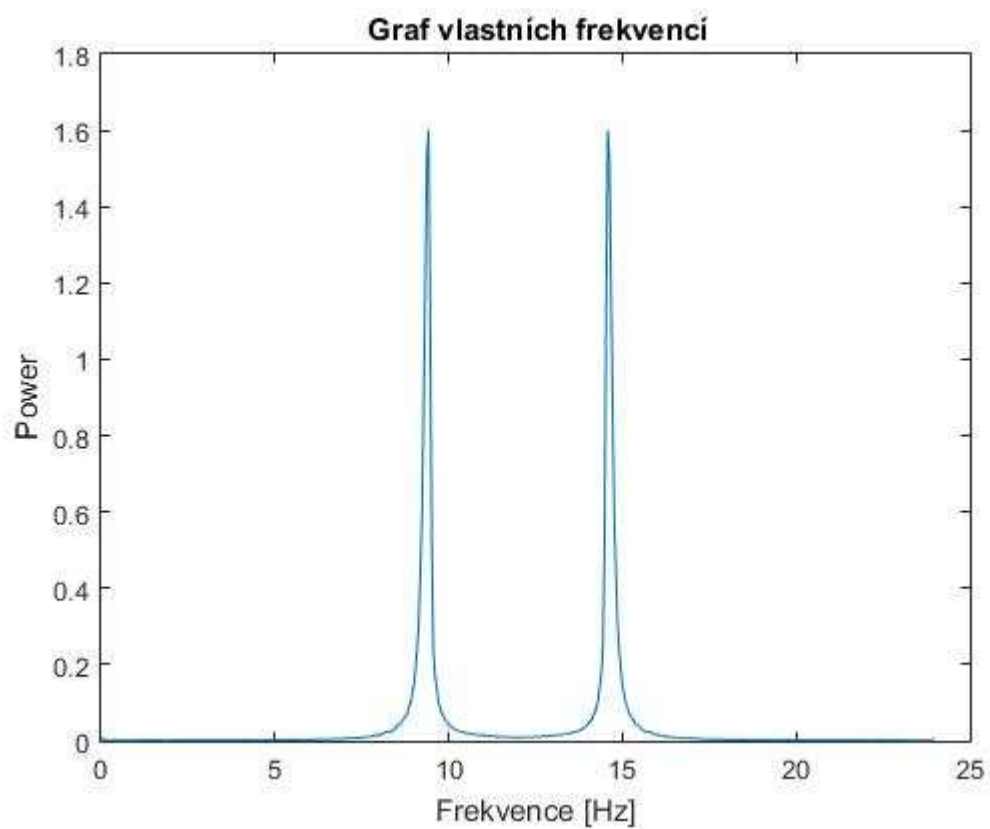
Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – Kridlo 1:

vyhodnocení pro bod 2007: vlastní frekvence **9,4219 Hz a 14,5781 Hz**

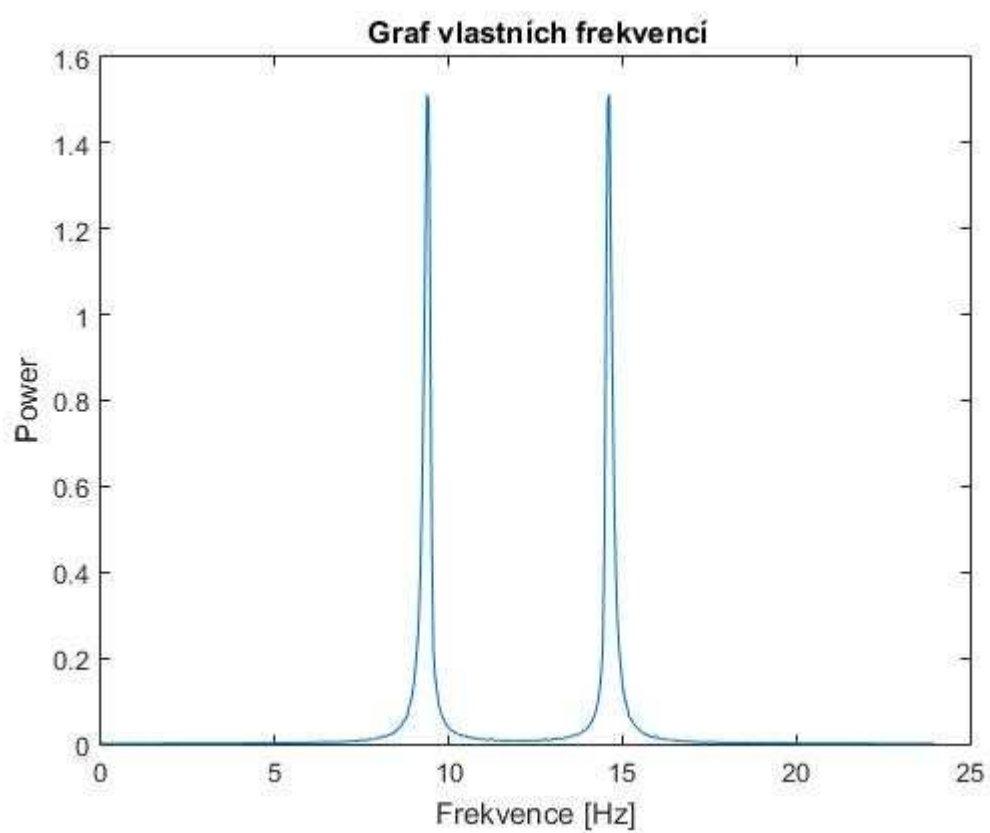
Hodnoty vlastních frekvencí byly při analýze vždy shodné pro všechny body daného měření, proto zde budou uváděny hodnoty pouze pro bod, ke kterému se váže připojení akcelerometru.

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – Kridlo 2:

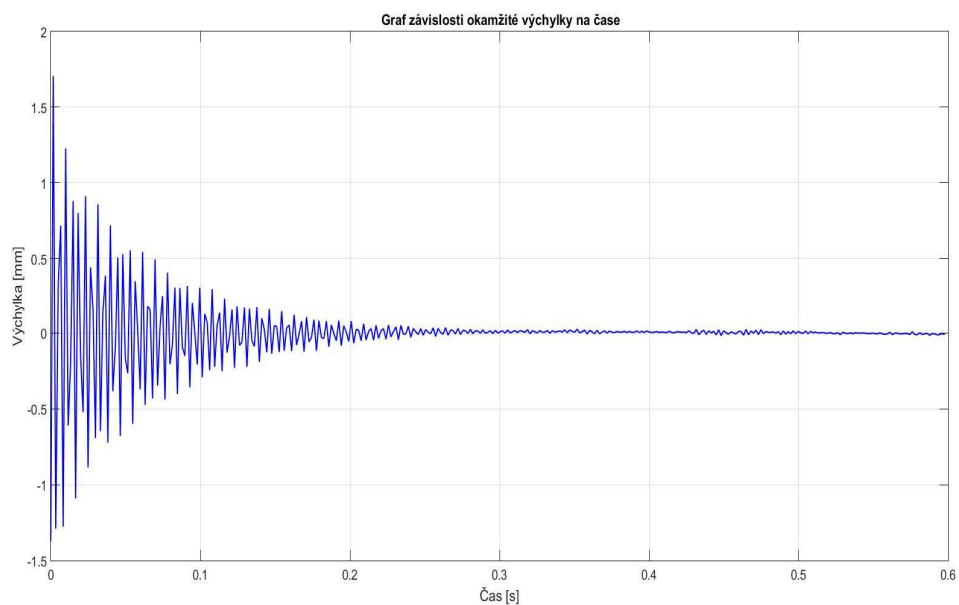
vyhodnocení pro bod 2007: vlastní frekvence **9,375 Hz a 14,625 Hz**



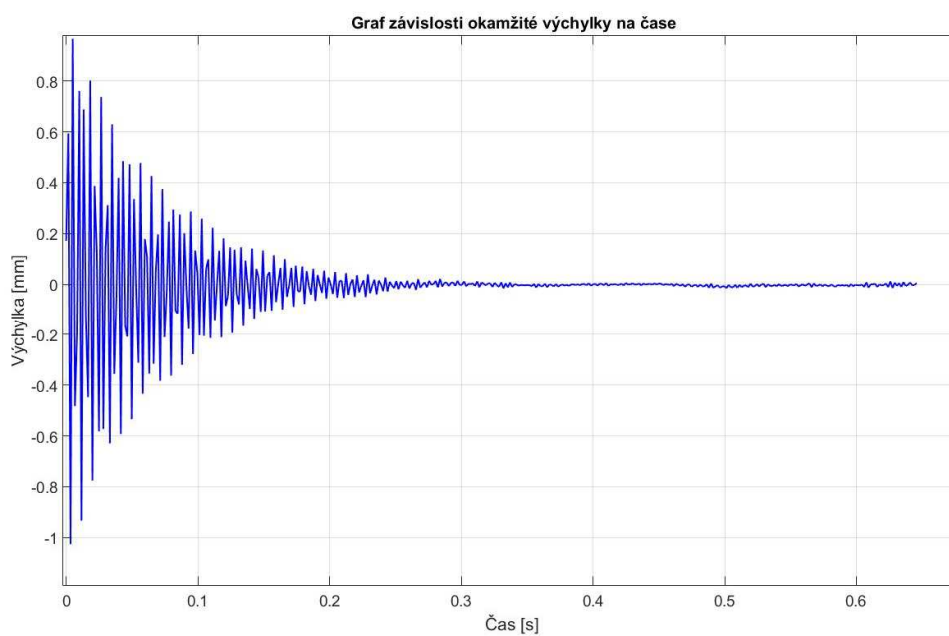
Obr. 98 Vlastní frekvence, Kridlo1, bod 2007



Obr. 99 Vlastní frekvence, Kridlo2, bod 2007



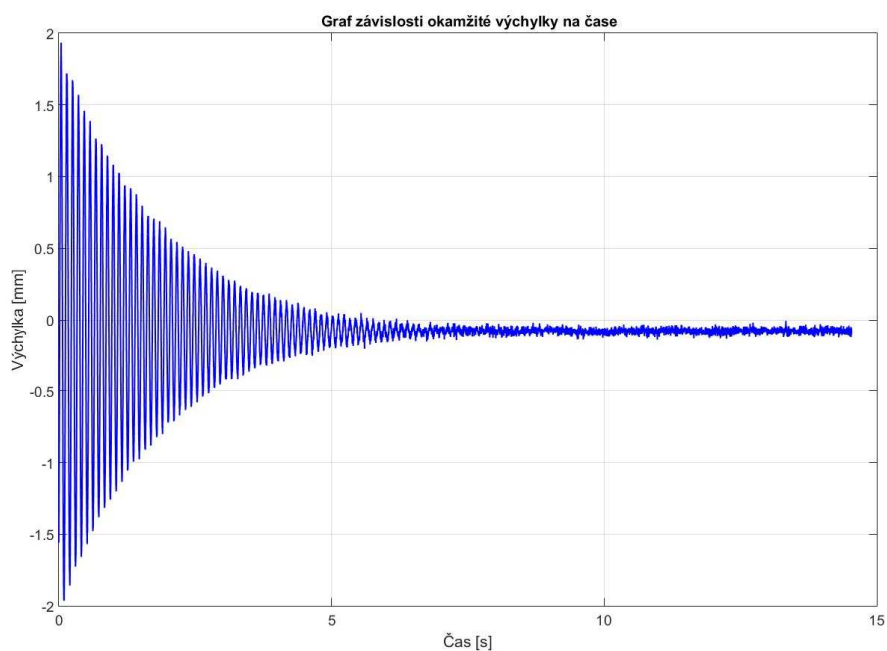
Obr. 100 Graf výchylka / čas, Kridlo1, bod 2007



Obr. 101 Graf výchylka / čas, Kridlo2, bod 2007

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2007 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo1:

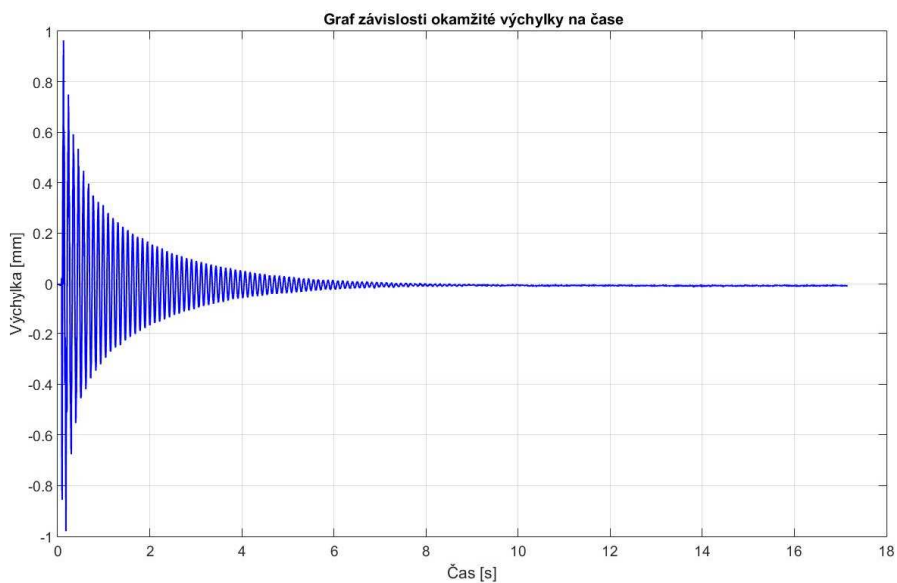
vlastní frekvence **9,4604 Hz**



Obr. 102 Graf výchylka / čas, Kridlo1, bod 2007 – akcelerometr

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2007 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo2:

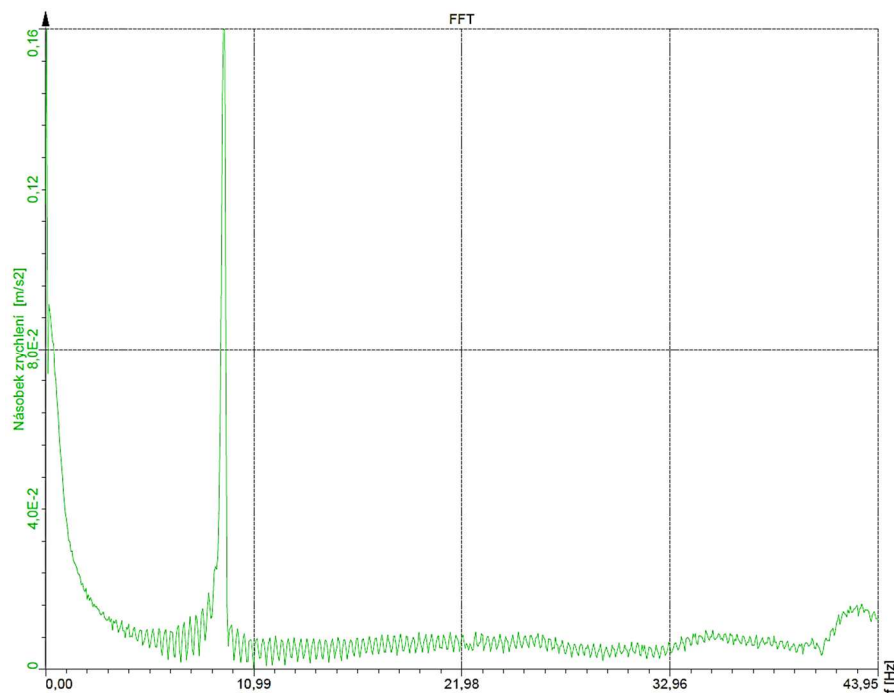
vlastní frekvence **9,3994 Hz**



Obr. 103 Graf výchylka / čas, Kridlo2, bod 2007 – akcelerometr

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2007, analyzovaná v programu Dewesoft – Kridlo1:

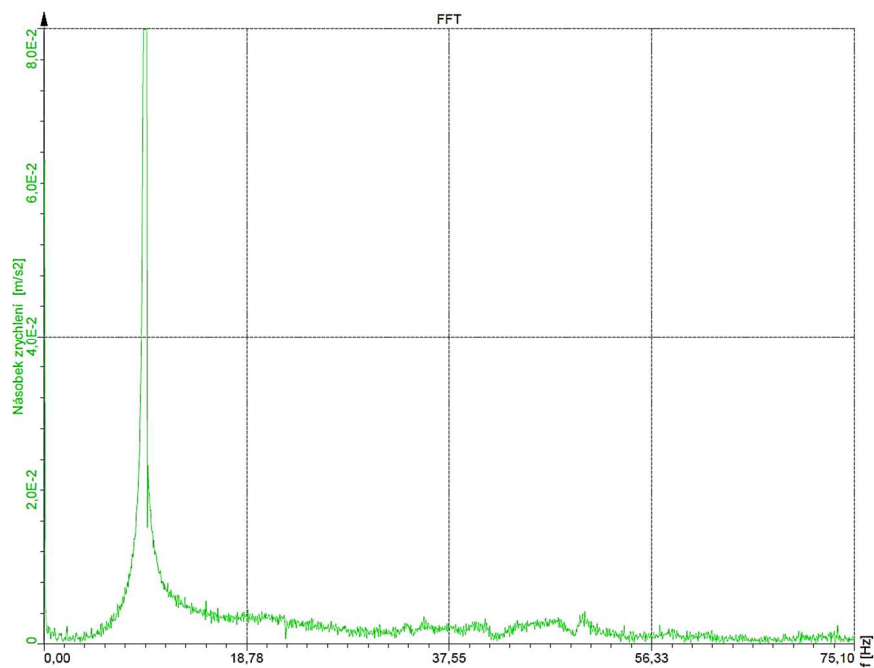
vlastní frekvence **9,399 Hz**



Obr. 104 Vlastní frekvence, Kridlo1, bod 2007, program Dewesoft

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2007, analyzovaná v programu Dewesoft – Kridlo2:

vlastní frekvence **9,338 Hz**



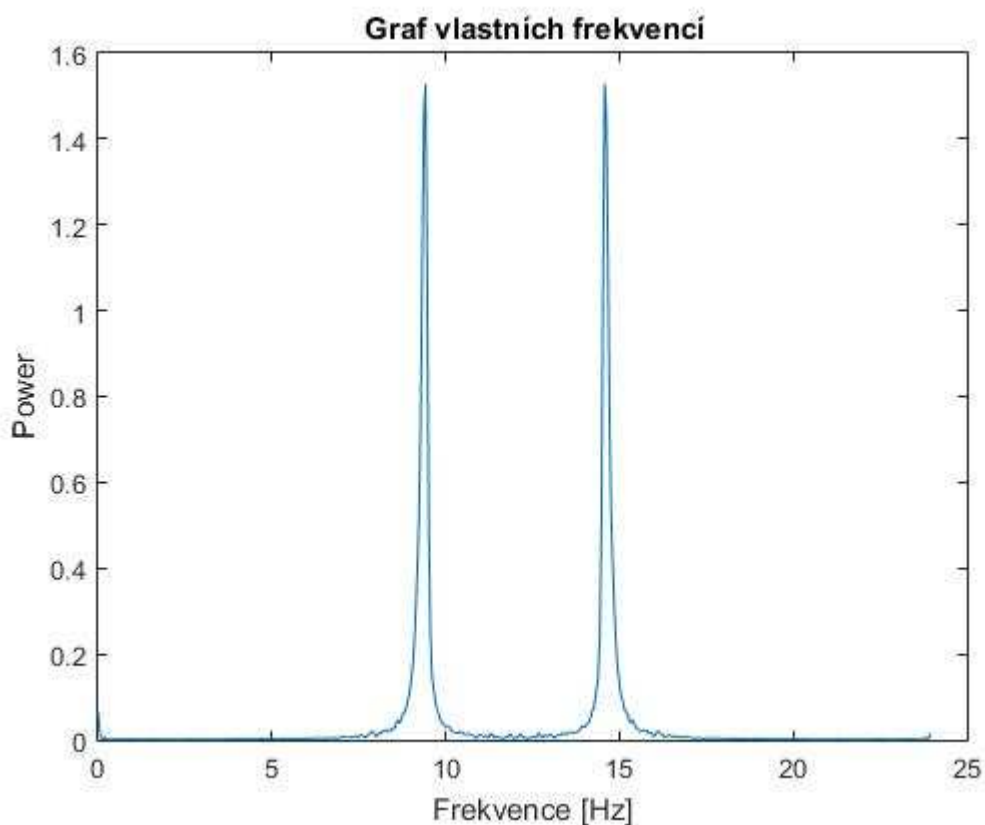
Obr. 105 Vlastní frekvence, Kridlo2, bod 2007, program Dewesoft

## 2) Měření č. 3, akcelerometr na pozici bodu 2006

- pozice bodu: zadní nosník
- vzdálenost od závěsu: 2740 mm
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 7,76 m
- počet měření: 1
- datum měření: 14. 4. 2016
- označení v souborech: Kridlo3
- zatížení: úder rukou ve směru osy Y na horní stranu potahu na konci křídla
- akcelerometr připevněný lepicí páskou na horní straně potahu nad bodem 2006

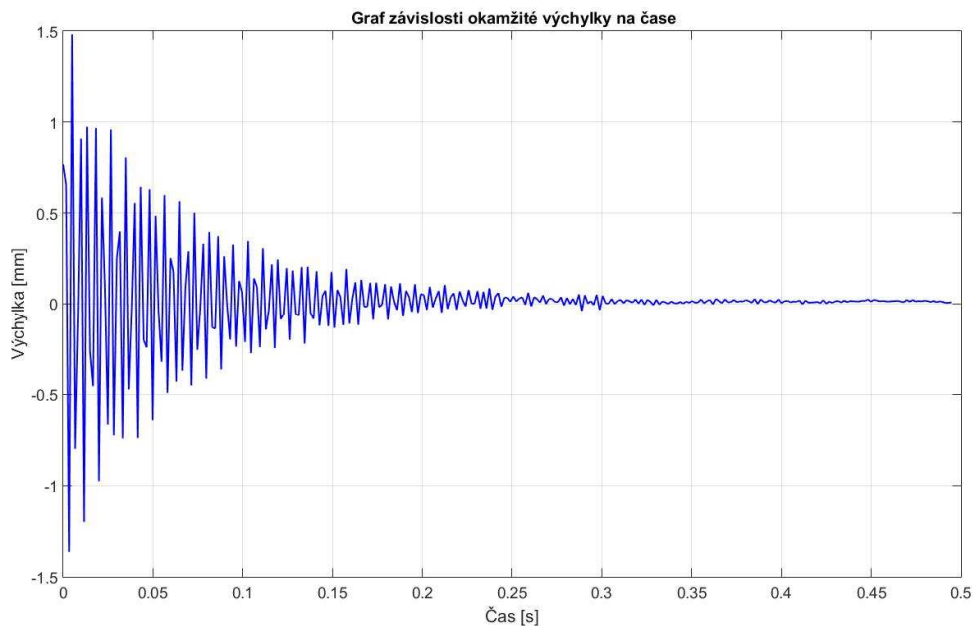
Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – Kridlo 3:

vyhodnocení pro bod 2006: vlastní frekvence **9,4219 Hz a 14,5781 Hz**



Obr. 106 Vlastní frekvence, Kridlo3, bod 2006





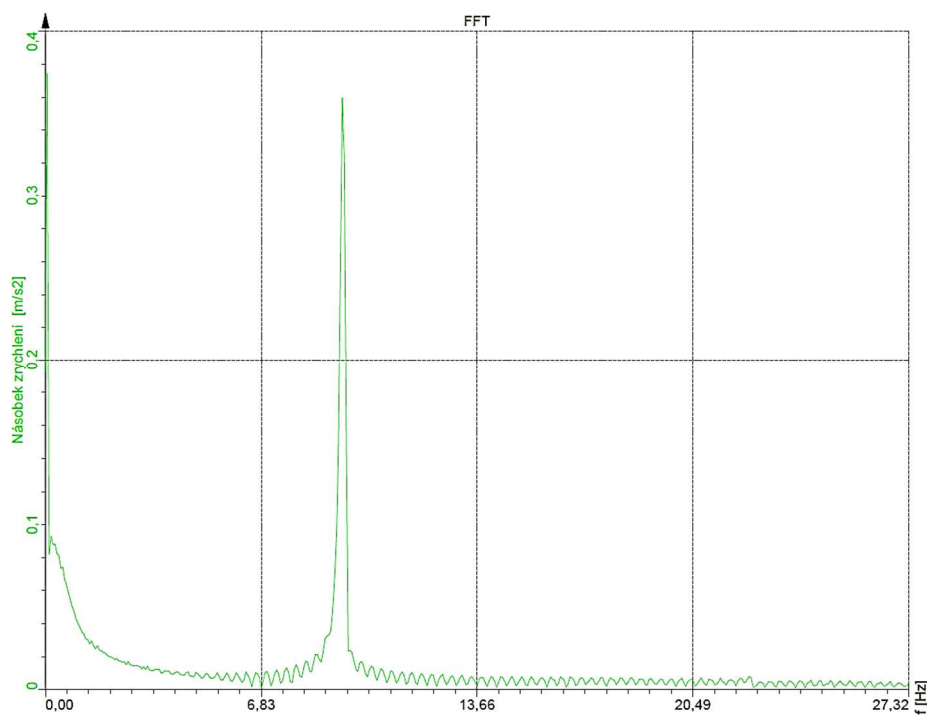
Obr. 107 Graf výchylka / čas, Kridlo3, bod 2006

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2006 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo3:

vlastní frekvence **9,3994 Hz**

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2006 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo3:

vlastní frekvence **9,399 Hz**



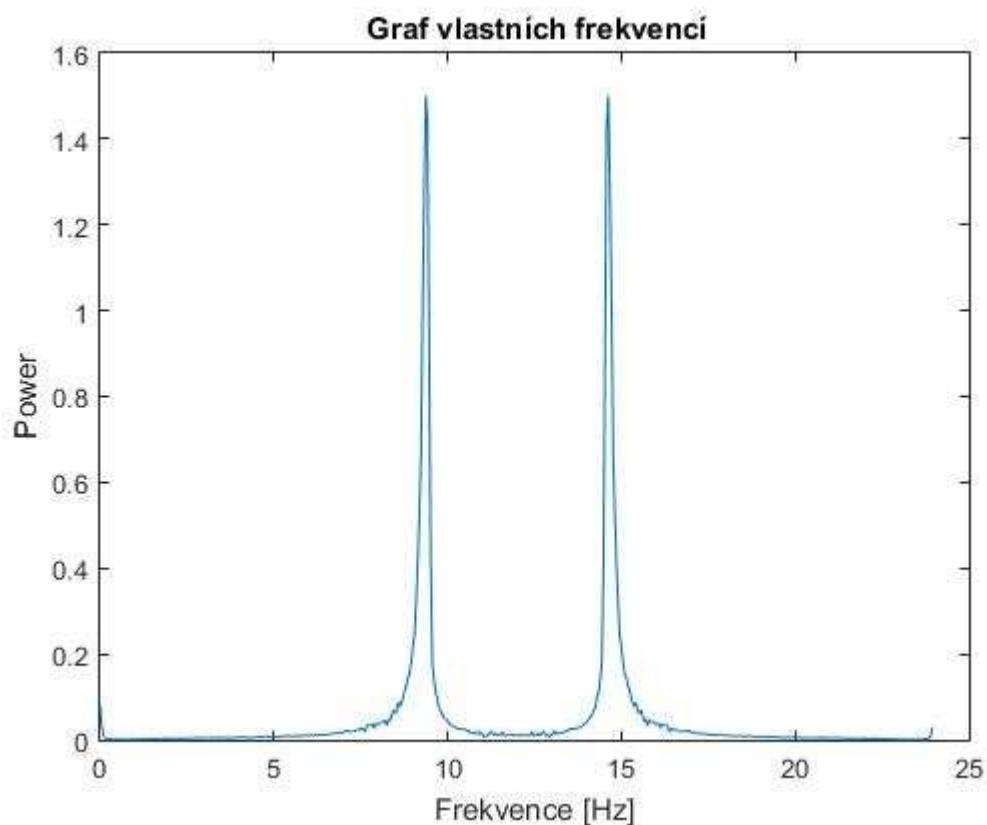
Obr. 108 Vlastní frekvence, Kridlo3, bod 2006, program Dewesoft

### 3) Měření č. 4, akcelerometr na pozici bodu 2003

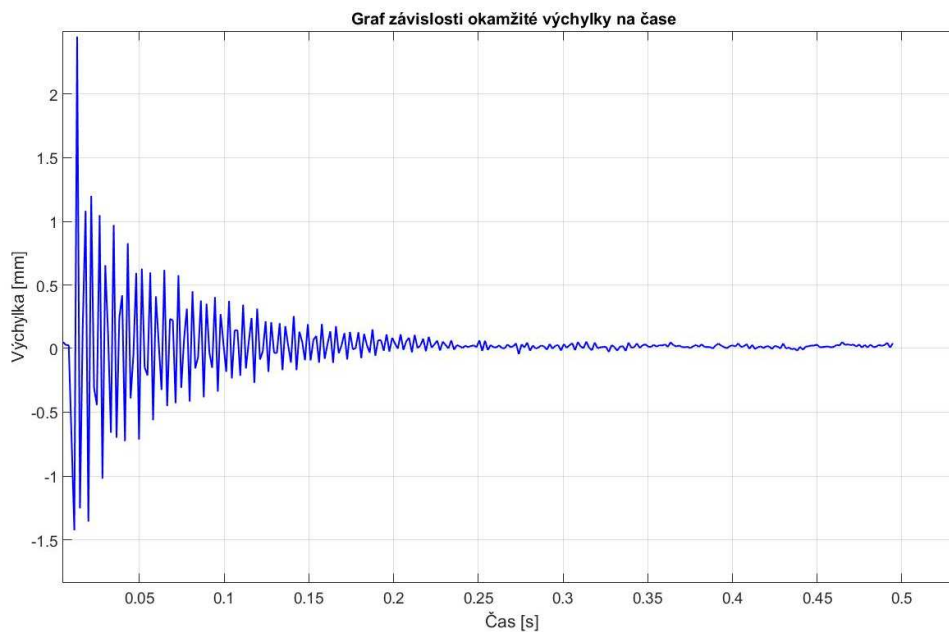
- pozice bodu: zadní nosník
- vzdálenost od závěsu: 2350 mm
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 7,76 m
- počet měření: 1
- datum měření: 14. 4. 2016
- označení v souborech: Kridlo4
- zatížení: úder rukou ve směru osy Y na horní stranu potahu na konci křídla
- akcelerometr připevněný lepicí páskou na horní straně potahu nad bodem 2003

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – Kridlo 4:

vyhodnocení pro bod 2003: vlastní frekvence **9,375 Hz a 14,625 Hz**



Obr. 109 Vlastní frekvence, Kridlo4, bod 2003



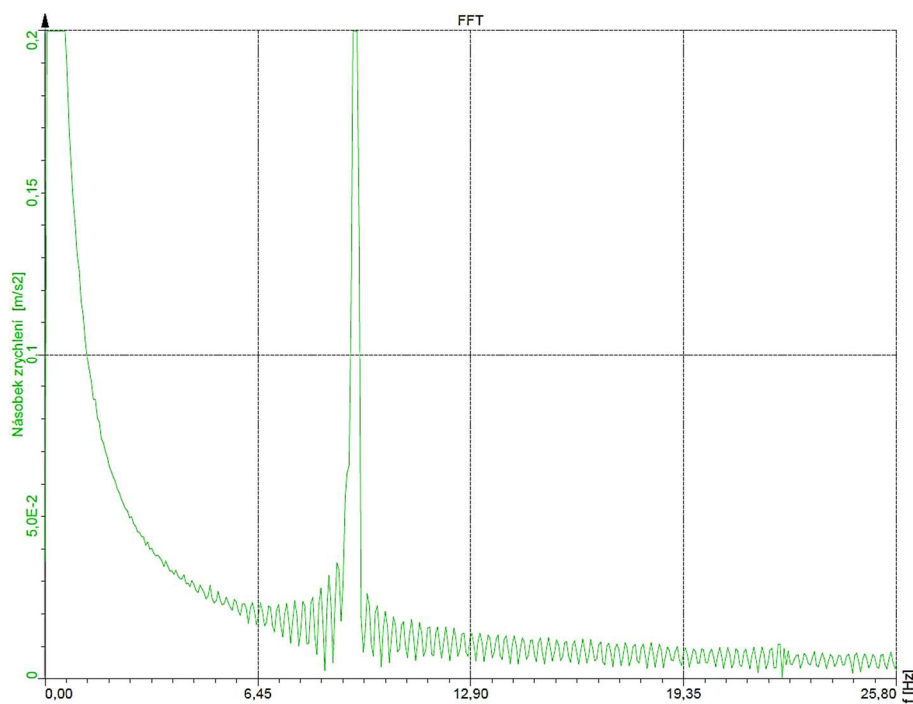
Obr. 110 Graf výchylka / čas, Kridlo4, bod 2003

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2003 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo4:

vlastní frekvence **9,3994 Hz**

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2003 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo4:

vlastní frekvence **9,460 Hz**



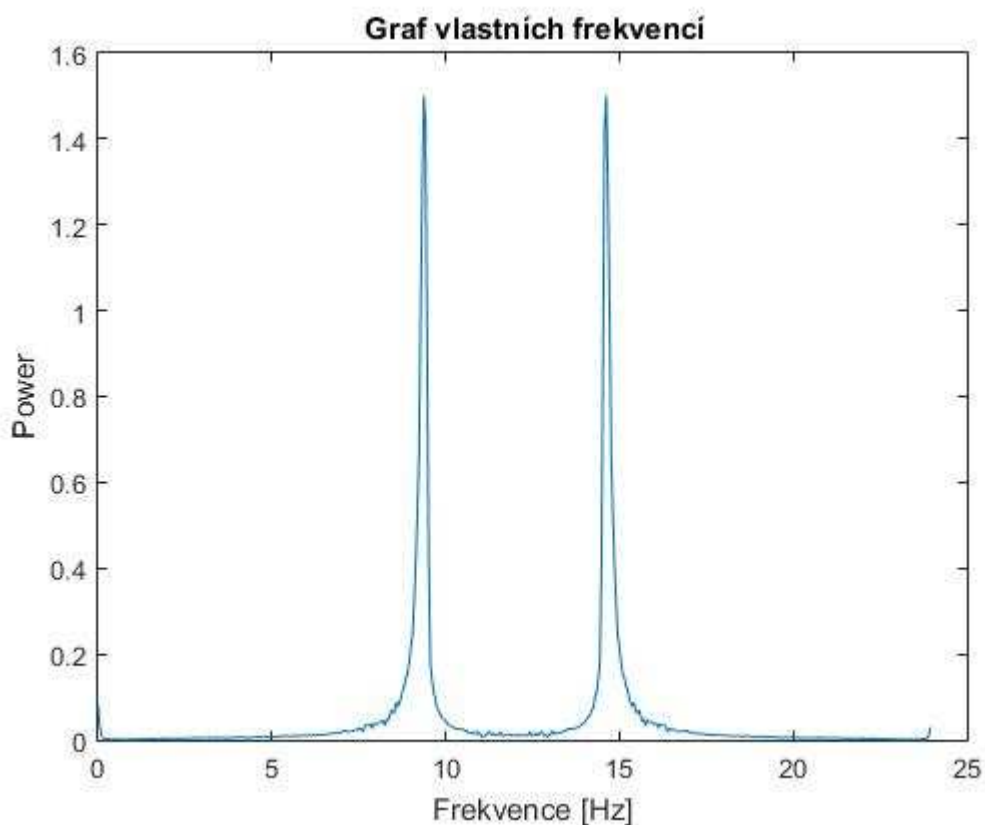
Obr. 111 Vlastní frekvence, Kridlo4, bod 2003, program Dewesoft

#### 4) Měření č. 5, akcelerometr na pozici bodu 2008

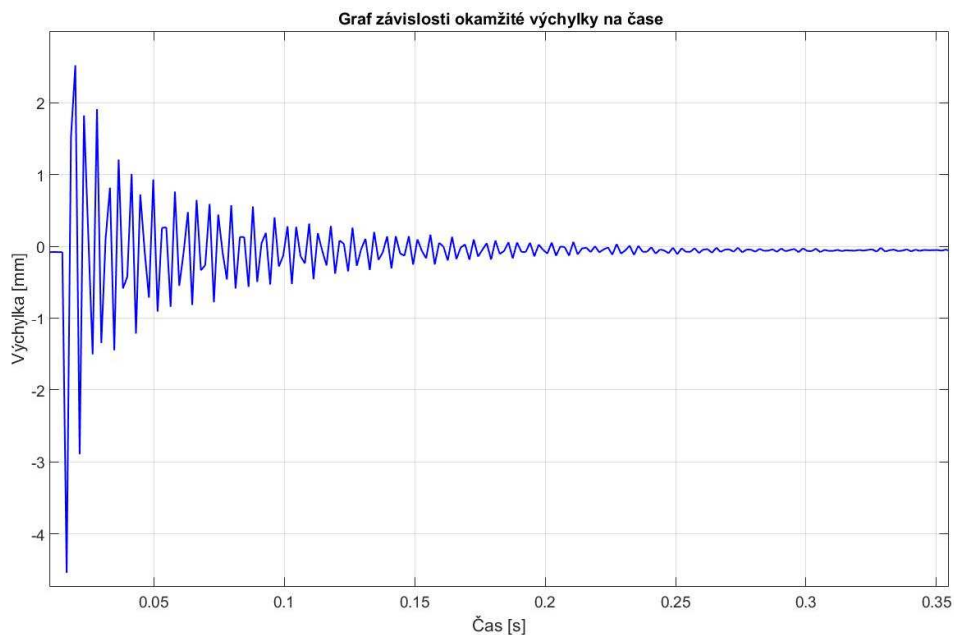
- pozice bodu: náběžná hrana
- vzdálenost od závěsu: 2950 mm
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 6,75 m
- počet měření: 1
- datum měření: 14. 4. 2016
- označení v souborech: Kridlo5
- zatížení: úder rukou ve směru osy Y na horní stranu potahu na konci křídla
- akcelerometr připevněný lepicí páskou na horní straně potahu nad bodem 2008

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – Kridlo 5:

vyhodnocení pro bod 2008: vlastní frekvence **9,375 Hz a 14,625 Hz**



Obr. 112 Vlastní frekvence, Kridlo5, bod 2008



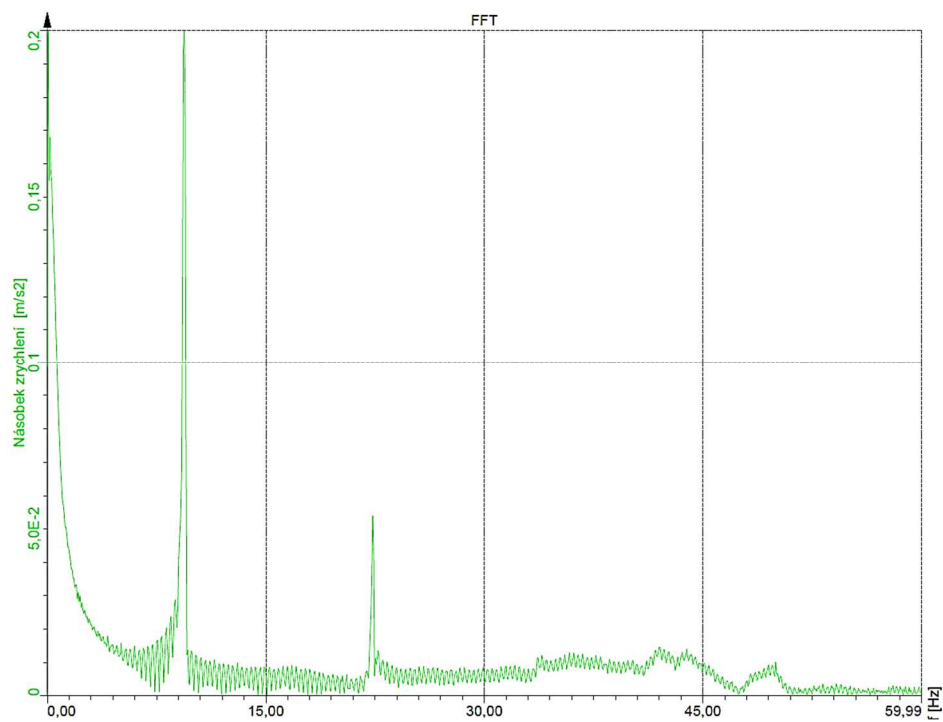
Obr. 113 Graf výchylka / čas, Kridlo5, bod 2008

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2008 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo5:

vlastní frekvence **9,3994 Hz**

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2008 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo5:

vlastní frekvence **9,399 Hz a 22,339 Hz**



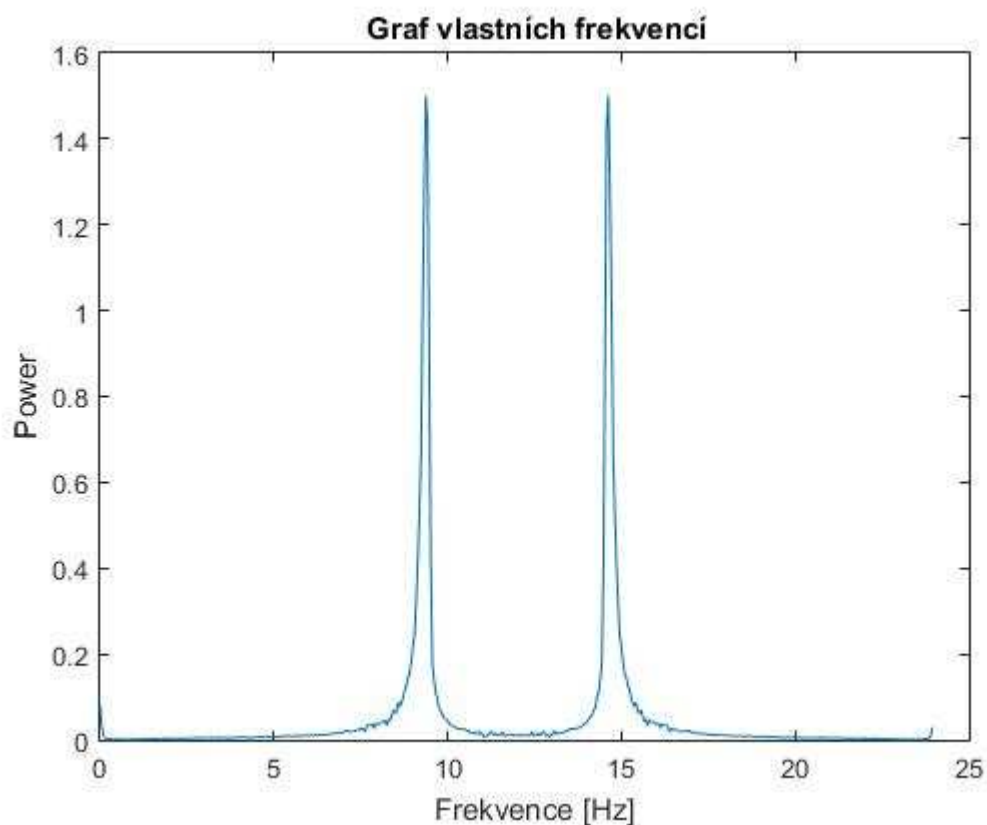
Obr. 114 Vlastní frekvence, Kridlo5, bod 2008, program Dewesoft

## 5) Měření č. 6, akcelerometr na pozici bodu 2001

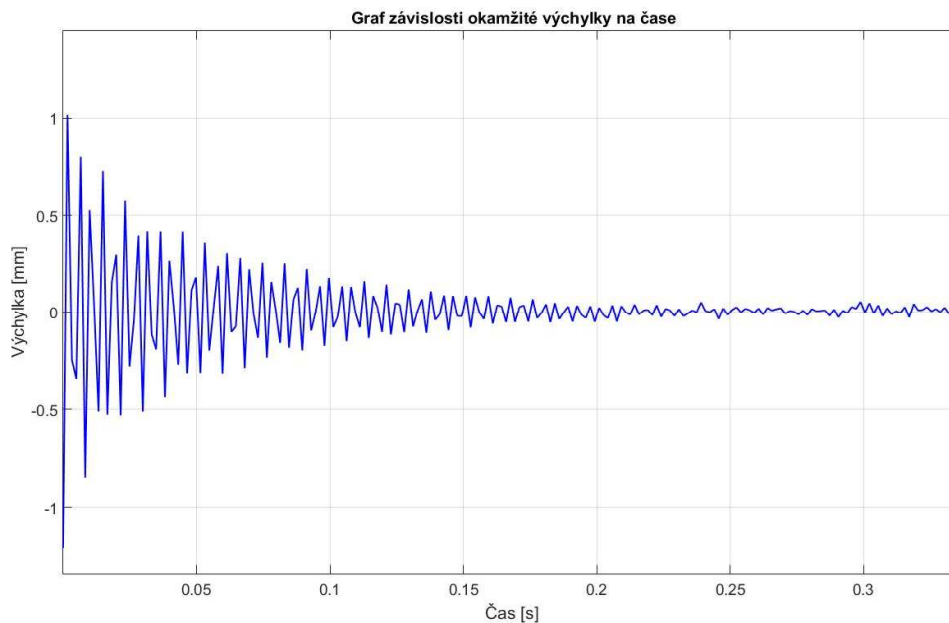
- pozice bodu: hlavní nosník
- vzdálenost od závěsu: 2950 mm
- vzdálenost snímaného objektu od základny kamer: 7,08 m
- počet měření: 1
- datum měření: 14. 4. 2016
- označení v souborech: Kridlo6
- zatížení: úder rukou ve směru osy Y na horní stranu potahu na konci křídla
- akcelerometr připevněný lepicí páskou na horní straně potahu nad bodem 2001

Experimentální data získaná optickým systémem Pontos a analyzována v programu Matlab pro měření – Kridlo 6:

vyhodnocení pro bod 2001: vlastní frekvence **9,375 Hz a 14,625 Hz**



Obr. 115 Vlastní frekvence, Kridlo6, bod 2001



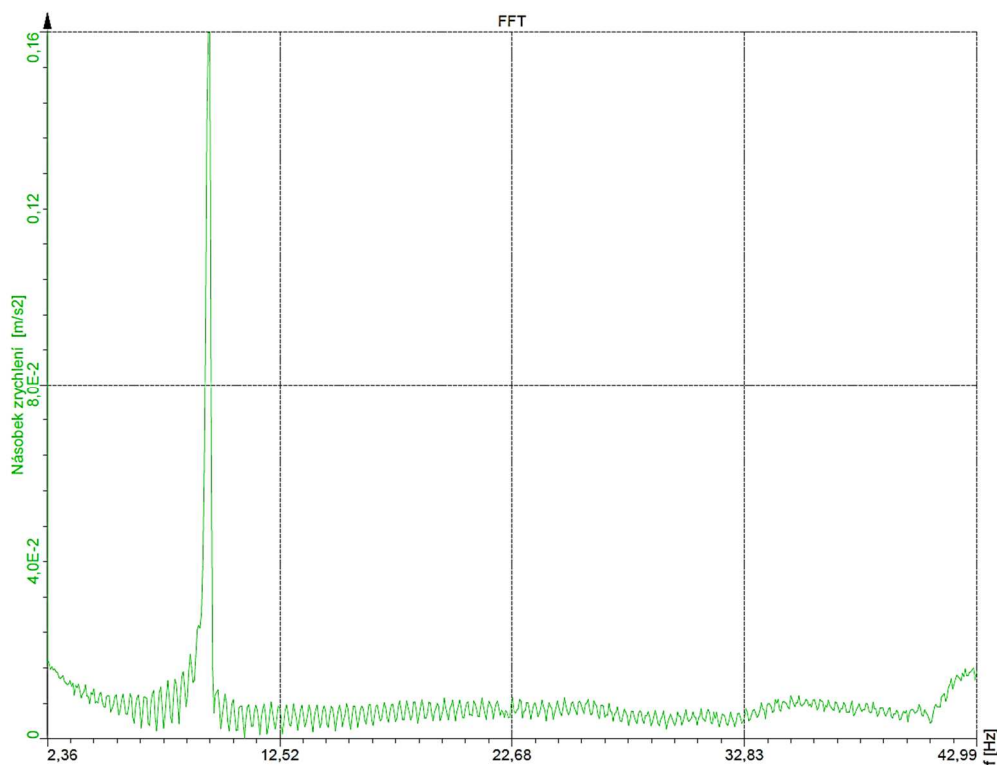
Obr. 116 Graf výchylka / čas, Kridlo6, bod 2001

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 2001 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo6:

vlastní frekvence **9,3994 Hz**

Experimentální data získaná akcelerometrem nad bodem 200 (horní potah), analyzovaná v programu Matlab – Kridlo6:

vlastní frekvence **9,460 Hz**



Obr. 117 Vlastní frekvence, Kridlo6, bod 2001, program Dewesoft

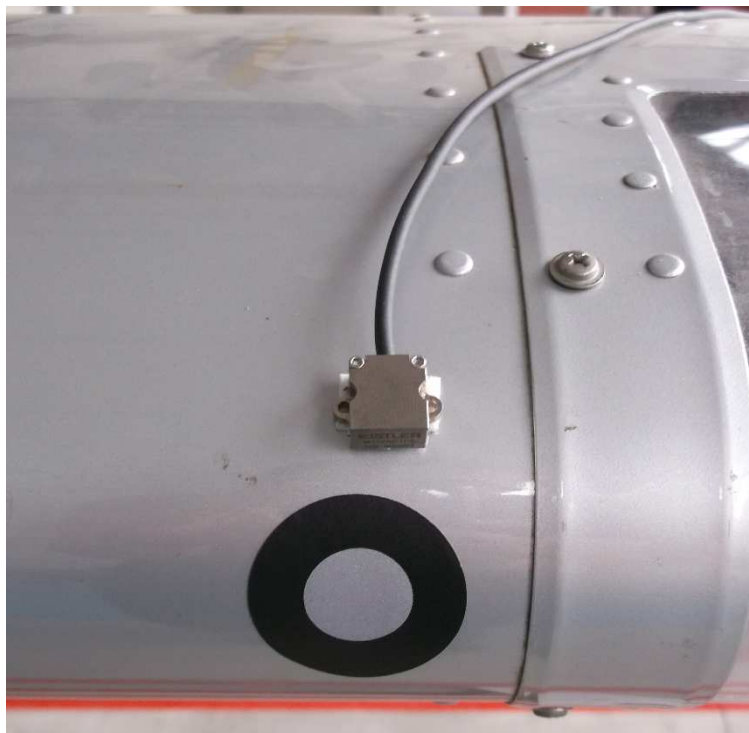


Shrnutí výsledků prvních vlastních frekvencí v Hz a procentuální rozdíl od hodnoty zjištěné systémem Pontos:

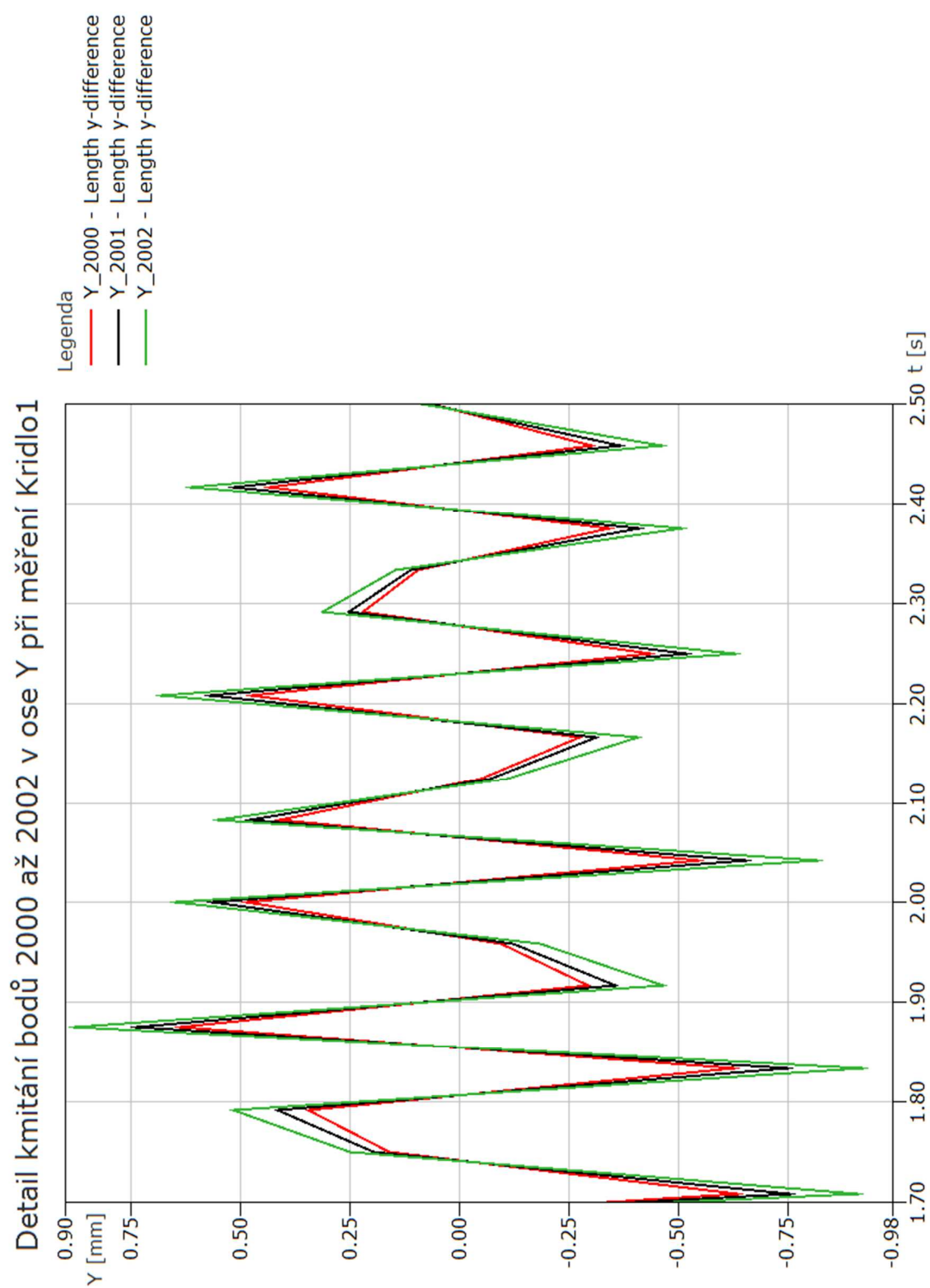
Tabulka 7 Shrnutí výsledků vlastních frekvencí křídla

Měření	Pontos	Akcelerometr - Matlab		Akcelerometr - Dewesoft	
			[%]		[%]
Křídlo1	9,4219	9,4604	0,41	9,3990	-0,24
Křídlo2	9,3750	9,3994	0,26	9,3380	-0,39
Křídlo3	9,4219	9,3994	-0,24	9,3990	-0,24
Křídlo4	9,3750	9,3994	0,26	9,4600	0,91
Křídlo5	9,3750	9,3994	0,26	9,3990	0,26
Křídlo6	9,3750	9,3994	0,26	9,4600	0,91

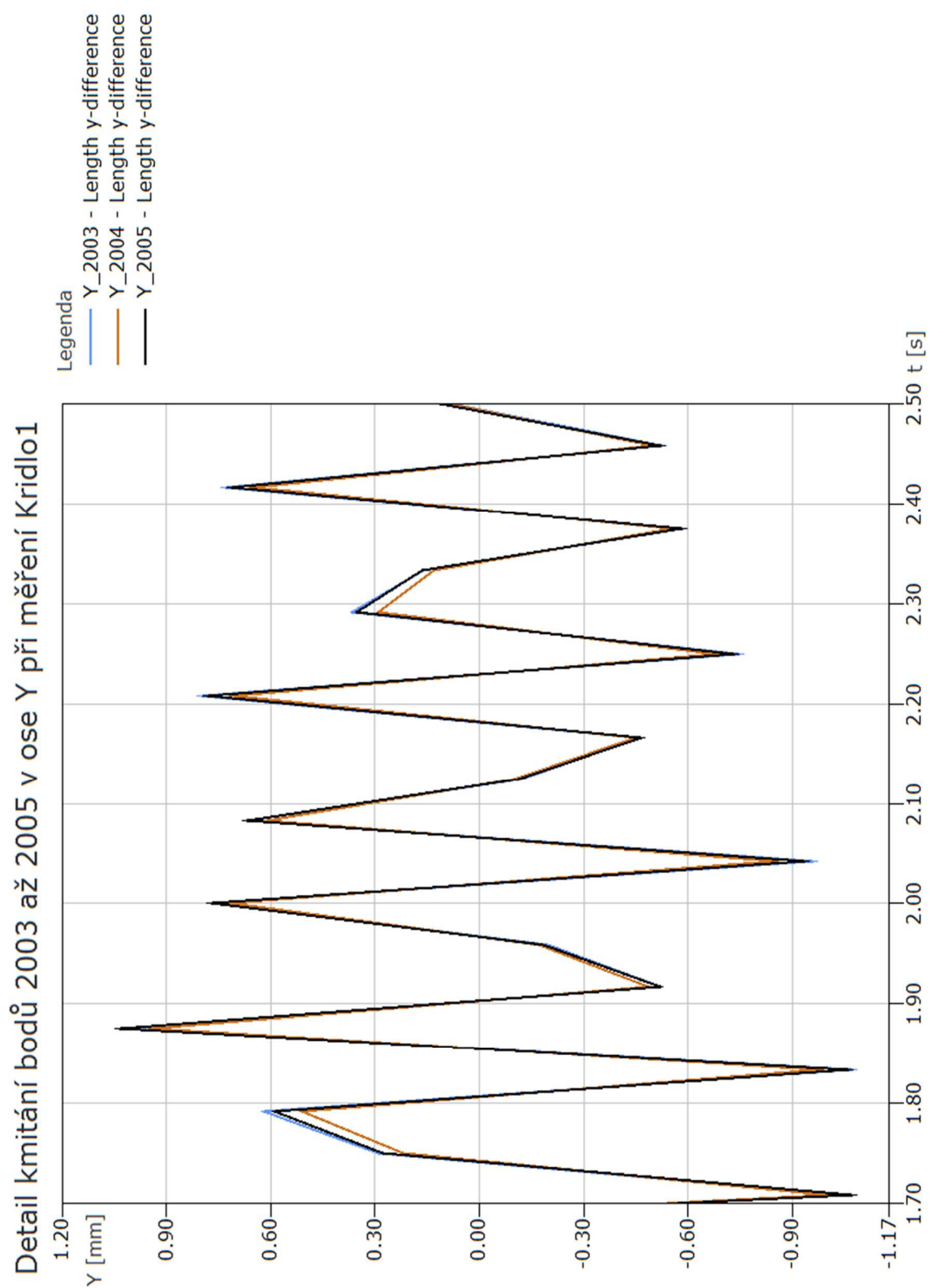
Při analýze vlastní frekvence kmitání křídla systém Pontos ve všech šesti měřeních identifikoval první dvě vlastní frekvence, kdežto měření pomocí akcelerometru identifikovalo pouze jednu. Výjimku tvořilo měření na náběžné hraně, kdy vlastní frekvence křídla podle akcelerometru byly 9,399 Hz a 22,339 Hz. Tato odchylka byla s největší pravděpodobností způsobena umístěním akcelerometru a tím způsobeným snímáním kmitání. Použitý akcelerometr snímá zrychlení pouze v jednom směru, proto upevnění akcelerometru na šikmé ploše způsobilo odchylku. Pro ověření, zda i zjištěná druhá hodnota vlastní frekvence systémem Pontos je správná, by bylo vhodné použít ještě jiný akcelerometr s menším frekvenčním rozsahem. Rozdíly prvních vlastních frekvencí zjištěných pomocí systému Pontos a pomocí akcelerometru (jak analyzované v programu Matlab, tak v programu Dewesoft) jsou nepatrné, nedosahují rozdílu ani 1%.



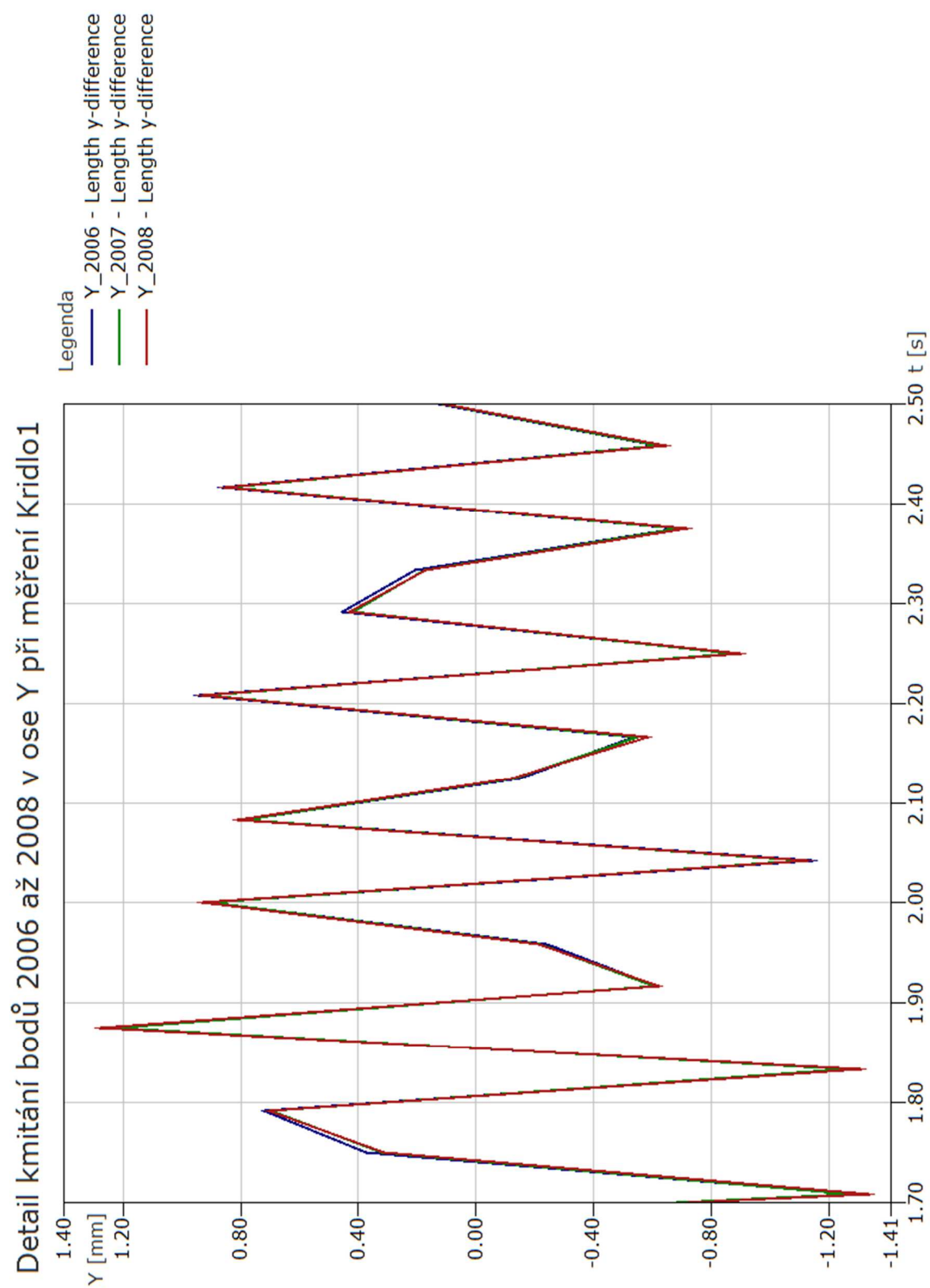
Obr. 118 Umístění akcelerometru na náběžné hraně křídla



Obr. 119 Detail kmitání bodů 2000 až 2002 v ose Y, měření Kridlo1

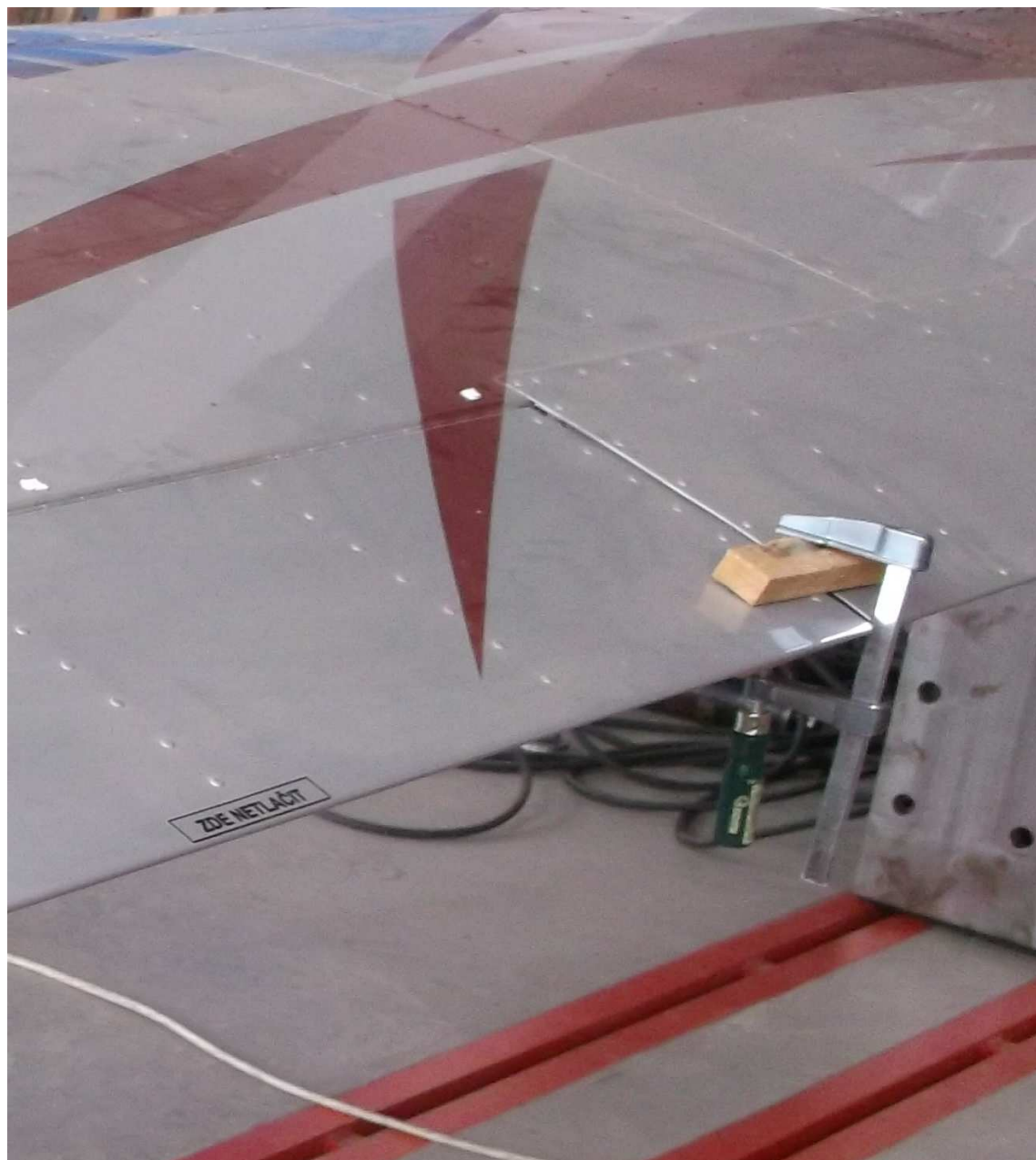


Obr. 120 Detail kmitání bodů 2003 až 2005 v ose Y, měření Kridlo1



Obr. 121 Detail kmitání bodů 2006 až 2008 v ose Y, měření Kridlo1

Při kontrole všech výsledků kmitání (zde je jen ukázka výsledků z měření Kridlo1) bylo zjištěno, že křídlo kmitalo ohybově a nevytvářel se zde krut. V případě, že by se vytvářel krut křídla v rovině Z-Y, docházelo by k tomu, že relativní posun jednotlivých bodů by měl na náběžné hraně opačné znaménko než posun bodů na zadním nosníku, případně již na hlavním nosníku. K detailnější frekvenční analýze by však bylo zapotřebí udělat kompletní modální analýzu.



Obr. 122 Zabezpečení křídélka proti pohybu

## 6 ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo vytvoření a realizování metodiky měření pro základní frekvenční analýzu optickým systémem Pontos. Při používání tohoto optického systému je velmi důležitá kalibrace a s tím spojené nastavení kamer, parametry snímání a také světelné podmínky. Pro opakovatelnost měření by bylo vhodné měřit v místnosti se stálými světelnými podmínkami (tzn. nejlépe zatemněná místnost osvětlená uměle).

Hlavní výhodou použití tohoto systému oproti jiným metodám je především bezkontaktní měření, které je žádoucí u dynamických zkoušek. K velkým přednostem také patří vyhodnocování pozic bodů v prostoru, neomezený počet bodů, které se připevňují na měřený předmět a také samotná jednoduchá aplikace těchto bodů. Při měření velkých objektů, u kterých je nutná kalibrace pomocí kalibračního kříže je vhodné mít velký měřicí prostor z důvodu nutnosti dodržení přibližně stejné vzdálenosti mezi kamerami a měřeným objektem jako u kalibrace.

Pro měření vlastních frekvencí však samotný systém Pontos nestačí. V programu Pontos lze analyzovat posunutí měřených bodů, vytvořit videa z měření, grafy posunutí bodů v závislosti na čase nebo například rozdílu vzdáleností mezi definovanými body, ale další vyhodnocování je nutné provést v jiném programu. K tomuto účelu byl zvolen program Matlab, ve kterém bylo napsáno několik skript pro vyhodnocování. Postup vyhodnocování by bylo vhodné optimalizovat tak, aby se procesy více zautomatizovaly, tzn. jeden program by automaticky posílal data do druhého. Tato optimalizace během diplomové práce nebyla vytvořena, jelikož se programy používaly i na data z akcelerometru, které jsou svou charakteristikou jiná než data z programu Pontos.

Také pro přesnější porovnání měření by bylo vhodné pro pruty používat lehčí akcelerometr, který by neměl tak velkou váhu vůči prutům a v obou případech měření (pruty i křídlo) by měl být akcelerometr lépe upevněn (např. voskem). Avšak kvůli opětovnému připevňování a odstraňování akcelerometru, a také z důvodu, že byl použit pouze pro kontrolu systému Pontos, bylo zvoleno jednodušší upevňování na měřený objekt.

Pro měření pomocí optického systému bylo využíváno maximální frekvence 24 Hz při plném rozlišení, což se ukázalo jako dostačující pro dané měřené objekty. Při porovnávání výsledků měření vlastních frekvencí měl systém Pontos srovnatelné výsledky s akcelerometrem, tudíž lze konstatovat, že měření této charakteristiky lze provádět i tímto systémem. Pro přesnější měření a především pro velmi rychlé dynamické děje by však byl vhodnější systém Pontos HS, který dosahuje snímkovací frekvence až 4000 Hz.

K úplné frekvenční analýze leteckých konstrukcí pomocí systému Pontos by bylo nutné vytvořit celou síť bodů, které by byly u křídla umístěny na náběžné hraně, hlavním i zadním nosníku a to v celé délce křídla na žebrech. Poté by se mohly analyzovat jak vlastní frekvence, tak vlastní tvary kmitání.

## 7 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

1. SLAVĚTÍNSKÝ, Dušan. O letadlech. [Online] 25. 4. 2010. [Citace: 16. 2. 2016.] <http://www.slavetind.cz/stavba/Mechanika/Aeroelastickejevy.aspx>.
2. doc. Ing. DANĚK Vladimír, CSc. *Aeroelasticita*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, 1987. str. 103. 55-619-87.
3. Ing. SLAVÍK, Svatomír. *Aeroelasticita leteckých konstrukcí*. Praha : ČVUT, 1997. str. 117. ISBN 80-01-01415-0.
4. *TRANSFER*. Ing. ČEČRDLE Jiří, Ph.D. [editor] Ing. Ladislav Vymětal. Praha : Výzkumný a zkušební letecký ústav, a.s., 2007. ISSN 1801- 9315.
5. doc. Ing. DANĚK Vladimír, CSc. *Mechanika letu II Letové vlastnosti*. Brno : AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o., 2011. ISBN 978-80-7204-761-1.
6. pplk. doc. inž. KOPŘIVA Zdeněk, CSc. *Aeroelasticita*. Brno : VAAZ, 1966. str. 297.
7. Aviation. *Why can not two modes coincide perfectly for some cases in Flutter phenomena?* [Online] [Citace: 26. 2. 2016.] <http://aviation.stackexchange.com/questions/5154/why-can-not-two-modes-coincide-perfectly-for-some-cases-in-flutter-phenomena>.
8. doc. Ing. DANĚK Vladimír, Csc. *Mechanika letu I, Letové výkony*. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2009. ISBN 978-80-7204-659-1.
9. JANDORA, Radek. Kmitavý pohyb. *Maturitní otázky do fyziky*. [Online] 2000. [Citace: 1. 3. 2016.] <http://radek.jandora.sweb.cz/f10.htm>.
10. REICHL Jaroslav, VŠETIČKA Martin. Fáze kmitavého pohybu. *Encyklopedie fyziky*. [Online] 2016. [Citace: 1. 3. 2016.] <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/157-faze-kmitaveho-pohybu>.
11. LEPIL, Ondřej. *Mechanické kmitání a vlnění*. Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-80-244-3295-3.
12. Prof. Ing. HÖSCHL, Cyril. *Nauka o kmitání*. Liberec : Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1969. str. 121. 55-805-68.
13. VRBKA Michal, VAVERKA Martin. Metoda konečných prvků. [Online] [Citace: 4. 3. 2016.] [http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska1\\_mkp.pdf](http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska1_mkp.pdf).
14. Loads Analysis and Aeroelastic Design. *Institute of Aeroelasticity*. [Online] [Citace: 4. 3. 2016.] [http://www.dlr.de/ae/en/desktopdefault.aspx/tabid-8350/6541\\_read-9334/](http://www.dlr.de/ae/en/desktopdefault.aspx/tabid-8350/6541_read-9334/).
15. (Diskrétní) Fourierova transformace. *Aplikovaná fyzika*. [Online] 11. 12. 2003. [Citace: 5. 3. 2016.] <http://apfyz.upol.cz/ucebnice/down/mini/fourtrans.pdf>.
16. Rychlá Fourierova transformace. *Katedra fyziky PŘF UJEP*. [Online] [Citace: 5. 3. 2016.] [http://physics.ujep.cz/~mlisal/nm\\_1-chomutov/jskvor/PDF/FourierTrans.pdf](http://physics.ujep.cz/~mlisal/nm_1-chomutov/jskvor/PDF/FourierTrans.pdf).
17. Prof. Ing. PÍŠTĚK Václav, DRsc., Ing. ŠTĚTINA Josef. *Pevnost a životnost*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, 1993. ISBN 80-214-0474-4.



18. Mgr. Ing. BILOŠOVÁ Alena, Ph.D. *Modální analýza*. Ostrava : Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2758-2.
19. JURÁNEK, Martin. Prostředky automatického řízení. *Průvodce akcelerometry pro začátečníky*. [Online] VŠB Technická univerzita Ostrava. [Citace: 6. 3. 2016.] [http://home1.vsb.cz/~jur286/prostredky\\_aut\\_rizeni/preklad.htm](http://home1.vsb.cz/~jur286/prostredky_aut_rizeni/preklad.htm).
20. Prof. Ing. HUSÁK Miroslav, Csc. 8. Akcelerometry. [Online] [Citace: 6. 3. 2016.] <http://www.micro.feld.cvut.cz/home/x34ses/prednasky/08%20Akcelerometry.pdf>.
21. KREIDL, Marcel a ŠMÍD, Radislav. *Technická diagnostika : senzory - metody - analýzy*. Praha : BEN - technická literatura, 2006. ISBN 80-7300-.
22. Pontos. *MCAE 3D Digitální technologie*. [Online] MCAE SYSTEMS, s.r.o. [Citace: 8. 3. 2016.] <http://www.mcae.cz/pontos>.
23. KOLÁŘOVÁ, Klára. Semestrální projekt. *Měření optickým systémem Pontos*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2015.
24. Fast Fourier transform. *MathWorks*. [Online] [Citace: 1. 4. 2016.] <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html?requestedDomain=www.mathworks.com>.
25. Poduška, J. *Experimentální analýza dynamického chování vetknutého nosníku*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. str. 36. Vedoucí bakalářské práce Ing. Lukáš Březina, Ph.D.

## 8 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

### 8.1 Seznam použitých symbolů

$a_k, b_j$	[1]	vektory
$c$	[m]	hloubka profilu
$c_L$	[1]	součinitel vztlaku
$d$	[m]	vzdálenost těžištní osy a elastické osy
$e$	[m]	vzdálenost mezi aerodynamickou a elastickou osou
$\bar{e}$	[1]	poměrná vzdálenost mezi aerodyn. a elastickou osou
$F_E$	[N]	elastická síla
$F_S$	[N]	setrvačná síla
$f$	[Hz]	frekvence
$i$	[1]	imaginární jednotka
$K_h$	[Nm <sup>-1</sup> ]	ohybová tuhost
$K_\alpha$	[Nmrad <sup>-1</sup> ]	torzní tuhost
$L$	[N]	vztlak
$M_S$	[Nm]	moment setrvačných sil
$M_{Z0}$	[Nm]	klopivý moment při nulovém součiniteli vztlaku
$M_\alpha$	[Nm]	aerodynam. klopivý moment vztažený k elastické ose
$M_\theta$	[Nm]	elastický moment
$N$	[1]	počet komplexních složek
$q$	[Nm <sup>-2</sup> ]	kinetický tlak
$T$	[s]	perioda
$t$	[s]	čas
$v$	[ms <sup>-1</sup> ]	rychlost
$v_D$	[ms <sup>-1</sup> ]	kritická rychlost torzní divergence
$v_\infty$	[ms <sup>-1</sup> ]	rychlost nerozrušeného proudu vzduchu
$X, Y, Z$	[1]	osy souřadného systému
$x_A$	[m]	vzdálenost aerodynamické osy od náběžné hrany
$x_E$	[m]	vzdálenost elastické osy od náběžné hrany
$x_T$	[m]	vzdálenost těžištní osy od náběžné hrany
$y$	[m]	okamžitá výchylka
$y_m$	[m]	amplituda
$\hat{y}$	[1]	fázový vektor

$\alpha$	[rad]	výsledný úhel náběhu
$\alpha_T$	[rad]	počáteční úhel náběhu
$\delta$	[rad]	výchylka kormidla
$\Theta$	[rad]	úhel zkroucení
$\pi$	[1]	Ludolfovo číslo
$\rho$	[kgm <sup>-3</sup> ]	hustota vzduchu
$\varphi_0$	[rad]	fáze kmitavého pohybu
$\omega$	[rads <sup>-1</sup> ]	kruhová frekvence kmitání

## 8.2 Seznam použitých zkratk

A. O.	aerodynamická osa
E. O.	elastická osa
T. O.	těžištní osa
MKP	metoda konečných prvků

## 9 SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

### 9.1 Seznam obrázků

Obr. 1 Základní trojúhelníkové schéma aeroelasticity [2].....	9
Obr. 2 Mechanický model typického řezu nosné plochy .....	10
Obr. 3 Dvourozměrová torzní divergence křídla [2].....	12
Obr. 4 Reverze příčného řízení [4].....	13
Obr. 5 Ukázka některých druhů flutteru [1].....	15
Obr. 6 Symetrický a nesymetrický ohybově-křídélkový flutter [7] .....	16
Obr. 7 Ukázka podmínek pro vznik buffetingu [3].....	16
Obr. 8 Harmonický kmitavý pohyb [10] .....	18
Obr. 9 Geometrie kmitání [9].....	19
Obr. 10 Skládání kmitavého pohybu [11] .....	19
Obr. 11 Pohyb řezu křídla při ohybově-krouživém kmitání [2].....	20
Obr. 12 Metoda konečných prvků [14] .....	21
Obr. 13 Schéma piezoelektrického akcelerometru [20].....	24
Obr. 14 Schéma základního kapacitního akcelerometru [20].....	24
Obr. 15 Kamery systému Pontos [23] .....	25
Obr. 16 Princip měření systémem Pontos [23].....	26
Obr. 17 Vzhled snímaných bodů [23].....	26
Obr. 18 Referenční kalibrační objekty [23] .....	27
Obr. 19 Sestavený systém Pontos 12M .....	28
Obr. 20 Kalibrační kříž .....	29
Obr. 21 Uživatelské prostředí programu Pontos .....	30
Obr. 22 Pozice kalibračního kříže při kalibraci [23] .....	31
Obr. 23 Rozmístění snímaných bodů na prut kruhového průřezu .....	32
Obr. 24 Rozmístění snímaných bodů na prut obdélníkového průřezu .....	33
Obr. 25 Kontrola vzdálenosti pomocí laserových paprsků .....	33
Obr. 26 Upnutí prutu k pevné základně.....	34
Obr. 27 Mód snímání .....	35
Obr. 28 Vytvoření vlastního souřadného systému.....	36
Obr. 29 Souřadný systém pro všechny analýzy prutů .....	36
Obr. 30 Teoretické hodnoty vlastních frekvencí pro prut kruhového průřezu o délce 1010 mm a tvary vlastních kmitů .....	41
Obr. 31 Vlastní frekvence, kruh 1, bod 2005.....	41
Obr. 32 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2005 .....	42
Obr. 33 Vlastní frekvence, kruh 1, bod 2006.....	42
Obr. 34 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2006 .....	42
Obr. 35 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2007 .....	43
Obr. 36 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2008 .....	43
Obr. 37 Graf výchylka / čas, kruh 1, bod 2009 .....	43
Obr. 38 Vlastní frekvence, kruh 2, body 2005 až 2009 .....	44
Obr. 39 Graf výchylka / čas, kruh 2, bod 2005 .....	44
Obr. 40 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2006 .....	44
Obr. 41 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2007 .....	45
Obr. 42 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2008 .....	45
Obr. 43 Graf výchylka/ čas, kruh 2, bod 2009 .....	45
Obr. 44 Vlastní frekvence, kruh 3, body 2005 až 2009 .....	46
Obr. 45 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2005 .....	46

Obr. 46 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2006 .....	46
Obr. 47 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2007 .....	47
Obr. 48 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2008 .....	47
Obr. 49 Graf výchylka / čas, kruh 3, bod 2009 .....	47
Obr. 50 Tvar kmitání v ose Y-Z, kruh 1 (vlevo) kruh 2 (vpravo), bod 2005..	48
Obr. 51 Tvar kmitání v ose Y-Z, kruh 3, bod 2005 .....	48
Obr. 52 Ukázka kmitání prutu s časem při měření: kruh 1 .....	49
Obr. 53 Teoretické hodnoty vlastních frekvencí pro prut obdélníkového průřezu o délce 930 mm a tvary vlastních kmitů .....	51
Obr. 54 Vlastní frekvence, obd 4, bod 2005 .....	51
Obr. 55 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2005 .....	52
Obr. 56 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2006 .....	52
Obr. 57 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2007 .....	52
Obr. 58 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2008 .....	53
Obr. 59 Graf výchylka / čas, obd 4, bod 2009 .....	53
Obr. 60 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2005 .....	54
Obr. 61 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2006 .....	54
Obr. 62 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2007 .....	54
Obr. 63 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2008 .....	55
Obr. 64 Graf výchylka / čas, obd 5, bod 2009 .....	55
Obr. 65 Tvar kmitání v ose Y-Z, obd 4 (vlevo) obd 5 (vpravo), bod 2005...	56
Obr. 66 Ukázka kmitání prutu s časem při měření: obd 5 .....	56
Obr. 67 Použití filtru na data získaná z akcelerometru .....	57
Obr. 68 Umístění a upevnění akcelerometru při měření AKCkruh5 .....	58
Obr. 69 Umístění a upevnění akcelerometru při měření AKCkruh6 .....	59
Obr. 70 Teoretické hodnoty vlastních frekvencí pro prut kruhového průřezu o délce 1060 mm a tvary vlastních kmitů .....	59
Obr. 71 Vlastní frekvence, AKCkruh 5, bod 2005.....	60
Obr. 72 Graf výchylka / čas, AKCkruh5, bod 2005.....	60
Obr. 73 Vlastní frekvence, AKCkruh6, bod 2006.....	61
Obr. 74 Graf výchylka / čas, AKCkruh6, bod 2006.....	61
Obr. 75 Graf výchylka / čas, AKCkruh5, bod 2005 - akcelerometr .....	62
Obr. 76 Graf výchylka / čas, AKCkruh6, bod 2006 - akcelerometr .....	62
Obr. 77 Vlastní frekvence, AKCkruh 5, bod 2005, program Dewesoft .....	63
Obr. 78 Vlastní frekvence, AKCkruh 6, bod 2006, program Dewesoft .....	63
Obr. 79 Detail upevnění akcelerometru.....	64
Obr. 80 Vlastní frekvence, AKCobd1, bod 2005.....	65
Obr. 81 Graf výchylka / čas, AKCobd1, bod 2005.....	66
Obr. 82 Graf výchylka / čas, AKCobd3, bod 2006.....	66
Obr. 83 Graf výchylka / čas, AKCobd1, bod 2005 – akcelerometr .....	67
Obr. 84 Graf výchylka / čas, AKCobd3, bod 2006 – akcelerometr .....	67
Obr. 85 Vlastní frekvence, AKCobd1, bod 2005, program Dewesoft .....	68
Obr. 86 Vlastní frekvence, AKCobd1, bod 2006, program Dewesoft .....	68
Obr. 87 Detail nalepení bodů na prutu obdélníkového průřezu .....	69
Obr. 88 Kalibrace pro měření vlastní frekvence křídla.....	70
Obr. 89 Uchycení křídla.....	71
Obr. 90 Připevnění měřených bodů na spodní potah křídla .....	71
Obr. 91 Rozmístění měřených bodů na křídle.....	72
Obr. 92 Pozice měřených bodů.....	73
Obr. 93 Ukázka umístění a připevnění akcelerometru .....	74

Obr. 94 Pohled shora na připravené měření .....	75
Obr. 95 Příprava měření v programu Pontos .....	76
Obr. 96 Identifikované body na křídle v programu Pontos .....	76
Obr. 97 Souřadný systém pro měření systémem Pontos.....	77
Obr. 98 Vlastní frekvence, Kridlo1, bod 2007 .....	78
Obr. 99 Vlastní frekvence, Kridlo2, bod 2007.....	78
Obr. 100 Graf výchylka / čas, Kridlo1, bod 2007 .....	79
Obr. 101 Graf výchylka / čas, Kridlo2, bod 2007 .....	79
Obr. 102 Graf výchylka / čas, Kridlo1, bod 2007 – akcelerometr .....	80
Obr. 103 Graf výchylka / čas, Kridlo2, bod 2007 – akcelerometr .....	80
Obr. 104 Vlastní frekvence, Kridlo1, bod 2007, program Dewesoft.....	81
Obr. 105 Vlastní frekvence, Kridlo2, bod 2007, program Dewesoft.....	81
Obr. 106 Vlastní frekvence, Kridlo3, bod 2006.....	82
Obr. 107 Graf výchylka / čas, Kridlo3, bod 2006 .....	83
Obr. 108 Vlastní frekvence, Kridlo3, bod 2006, program Dewesoft.....	83
Obr. 109 Vlastní frekvence, Kridlo4, bod 2003.....	84
Obr. 110 Graf výchylka / čas, Kridlo4, bod 2003 .....	85
Obr. 111 Vlastní frekvence, Kridlo4, bod 2003, program Dewesoft.....	85
Obr. 112 Vlastní frekvence, Kridlo5, bod 2008.....	86
Obr. 113 Graf výchylka / čas, Kridlo5, bod 2008 .....	87
Obr. 114 Vlastní frekvence, Kridlo5, bod 2008, program Dewesoft.....	87
Obr. 115 Vlastní frekvence, Kridlo6, bod 2001.....	88
Obr. 116 Graf výchylka / čas, Kridlo6, bod 2001 .....	89
Obr. 117 Vlastní frekvence, Kridlo6, bod 2001, program Dewesoft.....	89
Obr. 118 Umístění akcelerometru na náběžné hraně křídla.....	90
Obr. 119 Detail kmitání bodů 2000 až 2002 v ose Y, měření Kridlo1 .....	91
Obr. 120 Detail kmitání bodů 2003 až 2005 v ose Y, měření Kridlo1 .....	92
Obr. 121 Detail kmitání bodů 2006 až 2008 v ose Y, měření Kridlo1 .....	93
Obr. 122 Zabezpečení křídélka proti pohybu .....	94

## 9.2 Seznam tabulek

Tabulka 1 Shrnutí výsledků kruh 1 až kruh 3 .....	48
Tabulka 2 Shrnutí výsledků obd 4 a obd 5 .....	55
Tabulka 3 Shrnutí výsledků AKCKruh5.....	64
Tabulka 4 Shrnutí výsledků AKCKruh6.....	64
Tabulka 5 Shrnutí výsledků AKCobd1.....	69
Tabulka 6 Shrnutí výsledků AKCobd3.....	69
Tabulka 7 Shrnutí výsledků vlastních frekvencí křídla.....	90

## PŘÍLOHY

### Skript *readPONTOS*, vytvořený v programu Matlab

```
function [ matrix ] = readPONTOS(M,point)
%seradi data a vytvori matici z vystupu ze systemu PONTOS

    s=size(M);
    p=[];

    for i = 1:s(1)
        n=M(i,:);
        if n(1) == point
            p=[p;n];
        end
    end
    matrix = p;
end
```

### Skript *explorePONTOS*, vytvořený v programu Matlab

```
function [ points, M ] = explorePONTOS(name)
%nacte soubor s nazvem name (napr.: 'soubor.txt')
%vraci pocet bodu (podle indexace v prvni sloupci)

M = dlmread(name);%nacteni souboru

allpoints = M(:,1);%vybere prvni sloupec (indexy bodu)

n = length(allpoints);%pocet radku v nactenem souboru
firstpoint = allpoints(1);
k=1;

if k == firstpoint
    k=k+1;
end

i=1;
%zvetsi i o jedna, pokud narazi na novy index v prvni sloupci
while k ~= firstpoint
    i = i+1;
    k = allpoints(i);
end

%pocet bodu v souboru
points = i-1;
end
```



## Skript *ftransformPONTOS*, vytvořený v programu Matlab

```
function [numpoint,pointnames] = ftransformPONTOS(name)
%nahraje soubor.txt, zjistí kolik mericich bodu se v nem
%vyskystuje
%rozradí je do různých souboru a uloží jako .txt do složky,
%ze které je funkce spuštěna
%name je jméno souboru, zapsané jako string (do uvozovek s příponou
%napr. 'pontos.txt')
%numpoint je počet bodu
%pointnames je vektor názvu souboru

[numpoint, M] = explorePONTOS(name); %nacte soubor a zjistí počet
%merených bodu

%vytvorí pomocnou promennou
pointnames=[];

%cyklus separuje jednotlivé body měření a uloží je do nových
%textových souboru
for i = 1:numpoint
    point = M(i,1);%nacte bod
    matrix = readPONTOS(M,point);%vybere souřadnice bodu
    nam=num2str(point);%zmena datoveho typu
    pointname=['point_',nam,'.txt'];%vyvorí název souboru
    siz = size(pointnames);
    %podmínka zjistuje, zda jsou názvy souboru o stejném počtu znaku

    if i > 1
        if length(pointname) ~= siz(2)
            error('Názvy bodu v textovém řetězci musí být stej-
ne dlouhé! Zakomentuj řádek 29 v m-filu ftransformPONTOS.m')
        end
    end

    tab=table(matrix);%vytvorí tabulky (zmena datoveho typu pro
%jednoduší zápis do souboru)
    writetable(tab,pointname);%vytvorí soubor .txt a zapíše do
%nej souřadnice bodu
    pointnames=[pointnames; pointname];%přida jméno souboru
    %na konec vektoru
end
end
```

### **Skript *posunuti*, vytvořený v programu Matlab**

```
function [] = posunuti(name, column, value)

c = name;
name = dlmread(name);%nacte soubor
s = size(name);

%pricte ke kazdemu radku v sloupci column hodnotu value
for i = 1:s(1)
    name(i,column)=name(i,column)+value;
end

uptab = table(name);%vytvori tabulku
name = ['pos_', c];%vytvori textovy retezec - nazev souboru
writetable(uptab,name)%ulozi soubor

end
```

### **Skript *Tofourier*, vytvořený v programu Matlab**

```
function [furier] = Tofurier(name, timestep, xyz)
%nacte soubor vytvoreny funkci ftransformPONTOS.m a vybrane
%souradnice posle do funkce Furiert.m
%name je nazev souboru v uvozovkach '', timestep je
%casovy usek mezi snimanim a xyz je vyber souradnice v ''
%napriklad textovy soubor pro bod 2001 s casovym usekem mezi
%snimanim 0.002 a chci z-tovou souradnici:
%[furier] = Tofurier('Point_2001', 0.002, 'z')
p = csvread(name,1,0);
n = size(p);
t = [0];
for i = 2:n(1)+1
    t(i) = t(i-1)+timestep;
end
t=t(1:n(1));

switch xyz
    case 'x'
        x = p(:,2);
    case 'y'
        x = p(:,3);
    case 'z'
        x = p(:,4);
end

furier = Furiert(t,x);
end
```

## Skript *Furiert*, vytvořený v programu Matlab

```
function[vystup1] = Furiert(t,x)
%t je casovy skok
fs = 1000;%snimkovaci frekvence
m = length(x);%delka matice
n = pow2(nextpow2(m)); % transformace delky
y = fft(x,n);% rychla Fourierova transformace
f = (0:n-1)*(fs/n);% frekvencni rozsah
power = y.*conj(y)/n;
plot(f,power)
xlabel('Frekvence [Hz]')
ylabel('Power')
title('{\bf Graf vlastních frekvencí}')
vlastni_f = f(find(power==max(power)))
%vystup1 = power; vystup2 = f;
vystup1 = vlastni_f
Fig01 = figure('Color',[1 1 1],'Position', [10, 10, 1600, 900]);
subplot (1,1,1,'FontSize',24)
plot(t, x, 'b-', 'LineWidth',1.5);
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Výchylka [mm]')
title('{\bf Graf závislosti okamžité výchylky na čase}')
hold on
zoom on; grid on;
```

## Skript *integrace*, vytvořený v programu Matlab

```
function [A,T] = integrace(B)
%numerická integrace diskrétních hodnot pro zjištění posunutí ze
%znameho zrychlení
%obdelnikova metoda
B = load(B);%nacte soubor
t = B(:,1);%vektor hodnot casu
a = B(:,2);%vektor hodnot zrychlení
step = t(2) - t(1);%krok integrace
n = length(a);
v=[];
%prvni integrace zrychlení -> rychlost
for i = 1:n-1
    v(i) = step*(a(i+1)+a(i))/2;
end
n2 = length(v);
x=[];
T=[];
%druha integrace rychlost -> posunutí
for i = 1:n2-1
    x(i) = step*(v(i+1)+v(i))/2;
end
%vytvori vektor casu
n3 = length(x);
for i= 1:n3
    T(i) = step * i;
end
x=x';
T=T';
C = [T,x];
tab = table(C);%vytvori tabulku vyslednych hodnot
writetable(tab,'integrace');%ulozi do souboru integrace.txt
A = [x];
end
```

## Skript vetnos, vytvořený v programu Matlab [25]

```
function vetnos (b,h,L,ro,E,tvar,prurez)
%Funkce vetnos(b,h,L,ro,E,tvar,prurez) spocita vlastni frekvence
vetknuteho
%nosniku zadanych parametru, zobrazí první čtyři tvary vl. kmitu a
%určí polohu uzlových bodů, které zobrazí do grafu.
%Vstupní parametry jsou: b šířka průřezu nosníku v mm
%                               h výška průřezu nosníku v mm
%                               L délka nosníku v mm
%                               ro hustota materialu v kg/m3
%                               E modul pružnosti v tahu v Pa
%tvar určuje jaký tvar vlastních kmitů chceme
%                               zobrazit: 1 1. tvar
%                               2 2. tvar
%                               3 3. tvar
%                               4 4. tvar
%                               nebo 'vse' - všechny tvary
%prurez určuje, jestli je průřezem obdélník bxh 'obdelnik'nebo kruh
%o průměru b 'kruh'. Je-li průřezem kruh, pak zadáváme za b i za
%h stejnou hodnotu.
%Ke spuštění funkce je vhodné použít skript start, ve kterém se
%vyplní parametry, uloží a spustí. Tento soubor pak vyvolá funkci
%vetnos s požadovanými parametry.
```

```
%Frekvencní rovnice pro vetknutý nosník:
frov = @(x)cosh(x)*cos(x) + 1;
```

```
%Numerický výpočet kořenu frek. rovnice:
ymax = 11;
for y = 1:ymax
    kor(y) = fzero(frov,y);
end
eps = 1e-10;
j = 1;
koreny(j)=kor(j);
for y=1:(ymax-1)
    if abs(kor(y+1)-kor(y))>eps
        j=j+1;
        koreny(j)=kor(y+1);
    end
end
disp(['První čtyři kořeny frekvenční rovnice jsou
',num2str(koreny(1))',' ',num2str(koreny(2))',' ',
',num2str(koreny(3))',' ',num2str(koreny(4))',' '])
```

```
%Převod na základní jednotky:
b=b/1000;
h=h/1000;
L=L/1000;
```

```
%Výpočet vlastních frekvencí:
switch prurez
    case 'obdelnik'
        J = (b*h^3)/12;
        A = b*h;
    case 'kruh'
        J = (pi*b^4)/64;
        A = (pi*b^2)/4;
end
```

```

for n = 1:length(koreny)
    omega(n) = (sqrt(J/A))*(sqrt(E/ro))*((koreny(n))^2)/(L1^2);
    omega(n) = omega(n)/(2*pi);
end
disp(['První čtyři vlastní frekvence nosníku jsou
',num2str(omega(1)),' Hz, ',num2str(omega(2)),' Hz,
',num2str(omega(3)),' Hz, ',num2str(omega(4)),' Hz.'])

%hledani uzlovych bodu prvnich ctыр tvaru pomoci funkce fzero
nods = zeros(4,4);

for k = 2:4;
    bnl = koreny(k);
    bn = bnl/L;
    vych = @(x)cosh(bn*x) - cos(bn*x) - (cosh(bnl) +
cos(bnl))/(sinh(bnl) + sin(bnl))*(sinh(bn*x)- sin(bn*x));
    lmax = L;
    nl = 1;
    for l=0:lmax;
        uz(nl) = fzero(vych,l);
        nl = nl+1;
    end
    eps;
    m = 1;
    uzly(m)=uz(m);
    pmax = length(uz);
    for p=1:(pmax-1)
        if abs(uz(p+1)-uz(p))>eps
            m=m+1;
            uzly(m)=uz(p+1);
        end
    end
    nods(k,1:k) = uzly;
end
nods;
disp('Uzlové body pro první čtyři tvary kmitání (udáno ve vzdále-
nostech od vetknutého konce v mm) jsou:')
disp(['1. tvar ',num2str(nods(1,1))])
disp(['2. tvar ',num2str(nods(2,1:2))])
disp(['3. tvar ',num2str(nods(3,1:3))])
disp(['4. tvar ',num2str(nods(4,1:4))])

%Vykresleni prubehu vlastnich kmitu nosniku
x = [];
y = [];
for k = 1:length(koreny)
    bnl = koreny(k);
    bn = bnl/L;
    m = 1;
    for n = [0:0.1:L]
        x(k,m)=n;
        w = (cosh(bn*n) - cos(bn*n) - (cosh(bnl) +
cos(bnl))/(sinh(bnl) + sin(bnl))*(sinh(bn*n)- sin(bn*n)));
        y(k,m)=w;
        m = m+1;
    end
end

if tvar == 1
    x = x(1,1:end);
    y = y(1,1:end);

```

```

        plot(x,y,'blue');
        title (['1. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(1)),' Hz'])
        xlabel ('Vzdálenost [mm]')
        ylabel ('Výchylka [-]')
        grid on
elseif tvar == 2
    x = x(2,1:end);
    y = y(2,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    hold on
    plot(nods(2,2),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(2,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(2,2))])
    hold off
    title (['2. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(2)),' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 3
    x = x(3,1:end);
    y = y(3,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    hold on
    plot(nods(3,2),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(3,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,2))])
    plot(nods(3,3),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(3,3),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,3))])
    hold off
    title (['3. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(3)),' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 4
    x = x(4,1:end);
    y = y(4,1:end);
    plot(x,y,'blue');
    hold on
    plot(nods(4,2),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,2))])
    plot(nods(4,3),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,3),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,3))])
    plot(nods(4,4),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
    text(nods(4,4),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,4))])
    hold off
    title (['4. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(4)),' Hz'])
    xlabel ('Vzdálenost [mm]')
    ylabel ('Výchylka [-]')
    grid on
elseif tvar == 'vse'
    x1 = x(1,1:end);
    y1 = y(1,1:end);
    x2 = x(2,1:end);

```

```

y2 = y(2,1:end);
x3 = x(3,1:end);
y3 = y(3,1:end);
x4 = x(4,1:end);
y4 = y(4,1:end);

subplot(2,2,1)
plot(x1,y1,'blue');
title(['1. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(1)), ' Hz'])
xlabel('Vzdálenost [mm]')
ylabel('Výchylka [-]')
grid on
subplot(2,2,2)
plot(x2,y2,'blue');
hold on
plot(nods(2,2),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
text(nods(2,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(2,2))])
hold off
title(['2. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(2)), ' Hz'])
xlabel('Vzdálenost [mm]')
ylabel('Výchylka [-]')
grid on

subplot(2,2,3)
plot(x3,y3,'blue');
hold on
plot(nods(3,2),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
text(nods(3,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,2))])
plot(nods(3,3),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
text(nods(3,3),-0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(3,3))])
hold off
title(['3. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(3)), ' Hz'])
xlabel('Vzdálenost [mm]')
ylabel('Výchylka [-]')
grid on

subplot(2,2,4)
plot(x4,y4,'blue');
hold on
plot(nods(4,2),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
text(nods(4,2),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,2))])
plot(nods(4,3),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
text(nods(4,3),-0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,3))])
plot(nods(4,4),0,'-mo'
,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',5)
text(nods(4,4),0.25,['Uzel x = ',num2str(nods(4,4))])
hold off
title(['4. tvar vlastních kmitů, vlastní frekvence'
,num2str(omega(4)), ' Hz'])
xlabel('Vzdálenost [mm]')
ylabel('Výchylka [-]')
grid on
end

```



### **Skript start, vytvořený v programu Matlab [25]**

```
b = 5;
h = 5;
L = 1100;
E = 2.1e11;
ro = 7850;
tvar = 'vse';
prurez = 'kruh';
vetnos(b,h,L,ro,E,tvar,prurez)
%b a h jsou rozměry prutu, b je šířka, h je výška v milimetrech
%L je délka vetknutí prutu
%Modul pružnosti v tahu v Pa
%Hustota materialu v kg/m3
%Proměnná tvar má hodnoty 1,2,3,4 nebo 'vse' a určuje který tvar
%vlastních kmitů se má vykreslit - 1., 2., 3., 4.,
%nebo všechny do jednoho okna.
%Proměnná prurez určuje, jestli je prut 'obdelnik' nebo 'kruh'.
%Zvolíme-li 'kruh' pak za hodnoty b i h je nutno dosadit stejnou
%hodnotu - průměr kruhového prurezu.
%Pro více informací použijte help vetnos.
```